به نام خدا

"زمان در مدار"

مدرس: حمیدرضا اکبری

تابستان ۱۳۹۴

فهرست

۰- مقدمه ۳

۱- زمان در مدارهای دایروی ۴

۲- زمان در مدارهای بیضوی ۴

۲-۱- آنومالی ها و شناخت بهتر بیضی ۴

۲-۲- معادله کپلر ۵

۲-۳- جمع بندی ۶

۲-۴- حالت خاص مسیر پاره‌خط ۷

۳- زمان در مدارهای سهموی ۷

۳-۱- معادله بارکِر ۸

۳-۲- جمع بندی ۹

۴- زمان در مدارهای هذلولوی ۱۰

۴-۱- توابع هیپربولیک ۱۱

۴-۲- هذلولی کمکی ۱۲

۴-۳- معادله کپلر هذلولی ۱۶

۴-۴- جمع بندی ۱۷

۴-۵- حالت خاص مسیر نیم‌خط ۱۷

۵- قضایای لامبرت و اویلر ۱۷

۵-۱- صورت و اهمیت قضیه لامبرت ۱۷

۵-۲- اثبات قضیه لامبرت.. ۱۸

۵-۳- قضیه اویلر ۱۹

۰- مقدمه

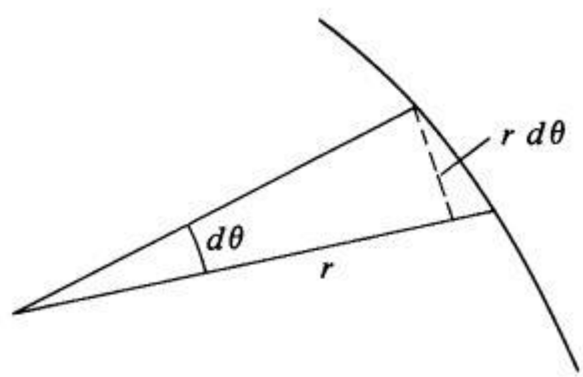
در این نوشتار قصد داریم که به مساله زمان در مدارهای تحت نیروی گرانش عکس مجذوری بپردازیم. هنگامی که ذره ای با جرم m تحت تاثیر نیروی جاذبه با رابطه $\vec{F} = -\frac{\mu m}{r^2}\hat{r}$ با شرایط اولیه مشخص $(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{v_1})$ شروع به حرکت می کند پس از طی مدت زمان Δt به شرایط ثانویه $(\overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{v_2})$ می رسد. هدف ما این است که رابطه بین شرایط اولیه و ثانویه و زمان سپری شده و ثوابت مساله (μ) را بیابیم.

برای حل این مساله از قانون دوم کپلر استفاده می کنیم. این قانون بیان می کند که بردار مکان ذره در زمان های مساوی مساحت های مساوی جاروب می کند یا به عبارت دیگر نرخ جاروب مساحت ثابت است. این قانون در واقع بیان دیگر قانون پایستگی تکانه زاویه ای است. اندازه تکانه زاویه ای واحد جرم (h) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h \equiv \frac{|\vec{L}|}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}| = \left|r\hat{r} \times \left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)\right| = \left|r^2\dot{\theta}\hat{k}\right| = r^2\dot{\theta} \qquad (1)$$

از طرفی میتوانیم نرخ جاروب مساحت توسط بردار مکان را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{r^2 d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h \qquad (2)$$



شکل ۱) مساحت جاروب شده در زمان کوتاه dt

بنابراین برای محاسبه زمان سپری شده تنها کافی است که مساحت جاروب شده را یافت:

$$dt = \frac{2}{h}\,dA \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{2}{h}\int_{r_1}^{r_2} dA \rightarrow \Delta t = \frac{2}{h}\,\Delta A \qquad (3)$$

۱- زمان در مدارهای دایروی

در مدار دایروی با شعاع a با استفاده از رابطه ۳ می توانیم بنویسیم:

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{\mu a}} \frac{a^2}{2} \Delta\theta = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Delta\theta \qquad (4)$$

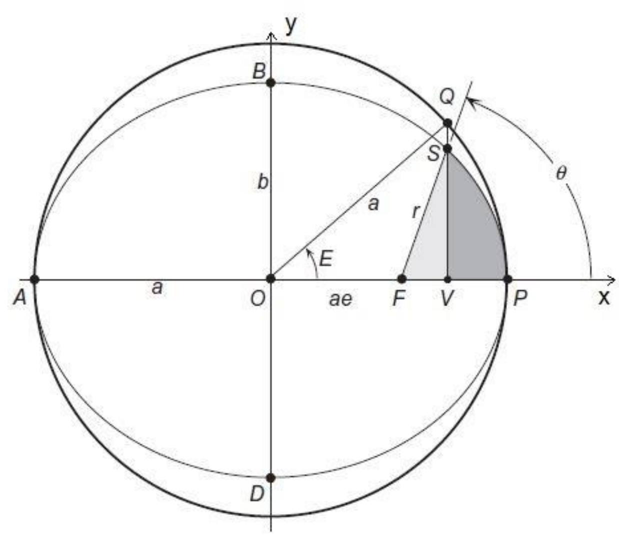
۲- زمان در مدارهای بیضوی

در مدار های بیضوی برای راحتی ما مبدا زمان را در نقطه حضیض فرض می کنیم یعنی در زمان $t = 0$ فرض می کنیم جسم در حضیض قرار دارد. دقت کنید که این موضوع کلیت مساله را تحت تاثیر قرار نمی دهد زیرا در صورتی که مبدا دیگری مد نظر ما باشد به راحتی می توان مدت زمانی که جسم از حضیض تا آن مبدا می رسد را محاسبه کرد و از زمان محاسبه شده کم کرد.

۲-۱- آنومالی ها و شناخت بهتر بیضی

برای بیان بهتر رابطه میان زمان طی شده و پارامترهای مربوط با آن از مفاهیم زیر استفاده می شود

- آنومالی حقیقی(θ) : به زاویه ای که جسم نسبت به کانون از حضیض مدار طی کرده است آنومالی حقیقی می‌گویند.
- آنومالی خروج از مرکزی (E) : به زاویه ای که محل تصویر جسم روی دایره کمکی نسبت به مرکز بیضی از حضیض مدار طی کرده است آنومالی خروج از مرکزی می گویند



شکل ۲)آنومالی های حقیقی و خروج از مرکزی

- آنومالی میانگین (M) : به زاویه ای فرضی که از لحظه ای که جسم روی حضیض قرار دارد با آهنگ ثابت از مقدار صفر شروع به افزایش می کند و هنگامی که جسم یک دور در مدارش زده مقدار 2π پیدا می کند آنومالی میانگین می گویند.

آنومالی خروج از مرکزی رابطه نزدیکی با مختصات دکارتی نقاط بیضی دارد:

$$x = a\sin E \qquad , \qquad y = b\cos E \qquad (5)$$

همین رابطه نزدیک موجب می شود که مساحت جاروب شده به صورت تابع صریحی از E باشد. همچنین E با استفاده از دایره کمکی تعریف می شود. در مورد دایره کمکی می دانیم که قضیه زیر برقرار است:

$$\frac{SV}{QV} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{A_{SVP}}{A_{QVP}} = \frac{b}{a} \qquad (6)$$

با توجه به این که هر نقطه روی بیضی مقدار r و θ و E مشخصی دارد می توان رابطه ای یافت که این پارامترها را به هم تبدیل کند. با توجه به تعریف r و θ و همچنین معادله قطبی بیضی($r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$) می توانیم بنویسیم:

$$x = ae + \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\cos\theta \qquad , \qquad y = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\sin\theta \qquad (7)$$

با متحد قرار دادن روابط ۵ و ۷ و با کمک رابطه قطبی بیضی می توان روابط زیر را یافت:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \qquad , \qquad r = a(1-e\cos E) \qquad (8)$$

همچنین در مورد آنومالی میانگین با استفاده از قانون سوم کپلر می توان نوشت:

$$M \equiv 2\pi\frac{t}{T} = 2\pi\frac{t}{\sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mu}}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}} \qquad (9)$$

تمرین: روابط ۵ و ۶ و ۸ را اثبات کنید.■

۲-۲- معادله کپلر

برای استفاده از رابطه ۳ و محاسبه زمان لازم است که ابتدا مساحت جاروب شده را بیابیم. هنگامی که جسم (شکل ۲) از نقطه P به نقطه S می رسد مساحت FSP را جاروب کرده است.

$$A_{FSP} = A_{FSV} + A_{SVP} \qquad (10)$$

$$(6) \rightarrow A_{SVP} = \frac{b}{a} A_{QVP} = \frac{b}{a}\left(a^2 \frac{E}{2} - \frac{a^2}{2} \sin E \,.\cos E\right)$$
$$= \frac{ab}{2}(E - \sin E \,.\cos E) \qquad (11)$$

$$A_{FSV} = \frac{1}{2}(x - ae)y = \frac{1}{2}(a\cos E - ae)(b\sin E)$$
$$= \frac{ab}{2}(\sin E \,.\cos E - e\sin E) \qquad (12)$$

از ترکیب روابط ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ خواهیم داشت:

$$A_{FSP} = \frac{ab}{2}(E - e\sin E) \qquad (13)$$

و با استفاده از رابطه ۳ خواهیم داشت:

$$t = \frac{2}{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}} \frac{a^2\sqrt{1 - e^2}}{2}(E - e\sin E) = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(E - e\sin E) \qquad (14)$$

با استفاده از رابطه ۹ رابطه ۱۴ به شکل کوتاهتر زیر که به آن "معادله کپلر" می گوییم تبدیل می شود:

$$M = E - e\sin E \qquad (15)$$

۲-۳- جمع بندی

در تمام مواردی که ما با مساله زمان در مدار بیضی شکل روبرو هستیم می توانیم مساله را ساده کنیم و آن را به یکی از این دو مساله تبدیل کنیم:

- چه مدت طول می کشد که جسم از حضیض به نقطه S برسد؟
- جسمی در حضیض است پس از طی شدن زمان t موقعیت جدید جسم کجاست؟

این مسائل به کمک روابط ۱۵ و ۸ قابل حل می باشند. مساله اول راه حل مستقیمی دارد که با جایگذاری در روابط جواب را به ما می دهد. امّا برای مساله دوم باید از روش های عددی برای حل معادله کپلر (مانند روش نیوتن-رافسون و روش تقریب های متوالی) استفاده کرد.

تمرین: جسمی در مداری بیضوی با دوره تناوب ۲ سال و خروج از مرکز ۰٫۳ در حال دور شدن از خورشید می باشد. چقدر طول می کشد که این جسم از فاصله ۱٫۳ واحد نجومی از خورشید به فاصله ۱٫۸ واحد نجومی از خورشید برسد؟■

تمرین: ماهواره ای در حال حرکت در مداری با دوره تناوب ۱۷ ساعت به دور زمین می باشد و کمترین ارتفاع این ماهواره از سطح زمین برابر با شعاع زمین است. ۳ ساعت پس از زمانی که ماهواره در دورترین فاصله خود از سطح زمین قرار دارد فاصله ماهواره از سطح زمین و اندازه سرعت آن را بیابید.■

۲-۴- حالت خاص مسیر پاره‌خط

هنگامی که جسمی تحت تاثیر جاذبه بدون سرعت اولیه رها می شود و یا به هر دلیل انرژی منفی و تکانه زاویه ای صفر باشد آنگاه $e = 1$ است و در تمام لحظات $\theta = 180°$ است.

در این موارد نمی توان از رابطه $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$ برای یافتن E استفاده کرد. در این مواقع مناسب است که مستقیما از رابطه $r = a(1 - e\cos E)$، E را محاسبه کرد.

تمرین: فرض کنید زمین ناگهان از حرکت متوقف شود و به سمت خورشید سقوط کند.

الف) چند روز طول می کشد که زمین به درون خورشید سقوط کند؟

ب) از روز ۱۰ ام تا روز ۲۰ ام پس از شروع سقوط زمین چه مسافتی را طی می کند؟■

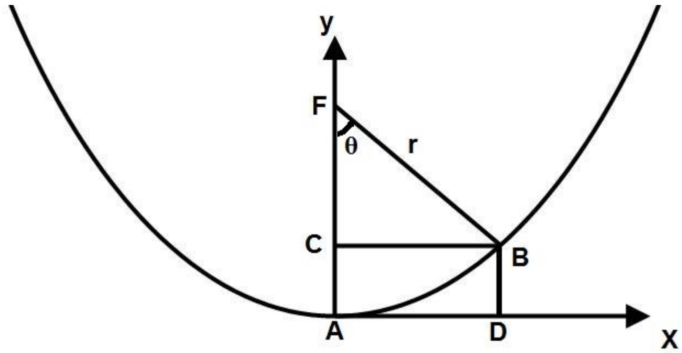
۳- زمان در مدارهای سهموی

برای مدار سهموی نیز مانند مدار بیضوی مبدا زمان را حرکت از حضیض در نظر می گیریم ولی برخلاف مدار بیضوی می توان رابطه ای مستقیم میان زمان طی شده و آنومالی حقیقی پیدا کرد و نیازی به تعریف آنومالی خروج از مرکزی نیست. معادله سهمی در دستگاه های دکارتی و قطبی را می دانیم که به صورت زیر است:

$$r = \frac{2p}{1+\cos\theta} \qquad (16)$$

$$y = \frac{x^2}{4p} \qquad (17)$$

که در روابط ۱۶ و ۱۷، p فاصله حضیض سهمی است. ($p = AF$)



شکل ۳) شماتیکی از مدار سهموی . F کانون سهمی است و A نقطه حضیض مدار است. جسم از A به B می رود.

۳-۱- معادله بارکِر

برای استفاده از رابطه ۳ باید ابتدا مساحت جاروب شده (A_{ABF}) را بیابیم.

$$A_{ABF} = A_{ABC} + A_{CBF} = A_{ADBC} - A_{ADB} + A_{CBF} \qquad (18)$$

$$A_{ADBC} = x_B . y_B = x_B . \frac{{x_B}^2}{4p} = \frac{{x_B}^3}{4p} \qquad (19)$$

$$A_{ADB} = \int_0^{x_B} y\, dx = \int_0^{x_B} \frac{x^2}{4p}\, dx = \frac{{x_B}^3}{12p} \qquad (20)$$

$$A_{CBF} = \frac{1}{2}\,(p - y_B). x_B = \frac{1}{2} p x_B - \frac{{x_B}^3}{8p} \qquad (21)$$

از روابطه ۱۸ تا ۲۱ نتیجه می‌گیریم:

$$A_{ABF} = \frac{{x_B}^3}{4p} - \frac{{x_B}^3}{12p} + \frac{1}{2} p x_B - \frac{{x_B}^3}{8p} = \frac{1}{2} p x_B + \frac{{x_B}^3}{24p} \qquad (22)$$

همچنین از رابطه ۱۶ می توانیم استفاده کنیم:

$$x_B = r \sin\theta = 2p \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 2p\, \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\, cos^2\frac{\theta}{2}} = 2p \tan\frac{\theta}{2} \qquad (23)$$

با ترکیب روابط ۲۲ و ۲۳ داریم:

$$A_{ABF}=\frac{1}{2}p\left(2p\tan\frac{\theta}{2}\right)+\frac{(2p\tan\frac{\theta}{2})^3}{24p}=p^2\left(\tan\frac{\theta}{2}+\frac{tan^3\frac{\theta}{2}}{3}\right) \qquad (24)$$

حالا میتوانیم از رابطه ۳ استفاده کنیم و مدت زمان طی شده را بدست بیاوریم:

$$t=\frac{2}{\sqrt{2\mu p}}p^2\left(\tan\frac{\theta}{2}+\frac{tan^3\frac{\theta}{2}}{3}\right)=\sqrt{\frac{2p^3}{\mu}}\left(\tan\frac{\theta}{2}+\frac{tan^3\frac{\theta}{2}}{3}\right) \qquad (25)$$

به رابطه فوق "معادله بارکِر" می گویند که مشابه معادله کپلر برای مدار های سهمی است. رابطه ۲۵ زمان را بر حسب آنومالی حقیقی می‌دهد می توان رابطه آنومالی حقیقی بر حسب زمان را نیز پیدا کرد.

$$\theta=2\,tan^{-1}\left(\sqrt[3]{Z+\sqrt{Z^2+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{Z+\sqrt{Z^2+1}}}\right) \qquad (26)$$

که در رابطه ۲۶ ، Z به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2p^3}}\,t \qquad (27)$$

تمرین: با استفاده از رابطه ۲۵، رابطه ۲۶ را اثبات کنید.■

تمرین: رابطه ۲۴ را با انتگرال مساحت با استفاده از رابطه قطبی سهمی(۱۶) بدست آورید. ■

۳-۲- جمع بندی

برای مدار های سهموی هم مانند مدار های بیضوی با دو نوع مساله روبرو هستیم:

- چه مدت طول می کشد که جسم از حضیض به نقطه B برسد؟
- جسمی در حضیض است پس از طی شدن زمان t موقعیت جدید جسم کجاست؟

با استفاده از روابط ۲۵ و ۲۶ می توان به ترتیب مسائل نوع اول و دوم را حل کرد. با توجه به ظاهر پیچیده رابطه ۲۶ و سخت بودن به خاطر سپردن آن می توان مساله نوع دوم را با کمک روش های حل عددی معادله بارکر (مانند روش نیوتن-رافسون و روش تقریب های متوالی) حل کرد.

تمرین: جسمی را با سرعت فرار و با زاویه °۴۰ نسبت به سطح زمین پرتاب می کنیم (از چرخش زمین و اثرات جو صرفنظر کنید)

الف) پس از یک ساعت فاصله جسم از سطح زمین چقدر است؟

ب) چه مدت پس از پرتاب، جسم به فاصله ۱۰۰۰۰ کیلومتر از سطح زمین می رسد؟ ■

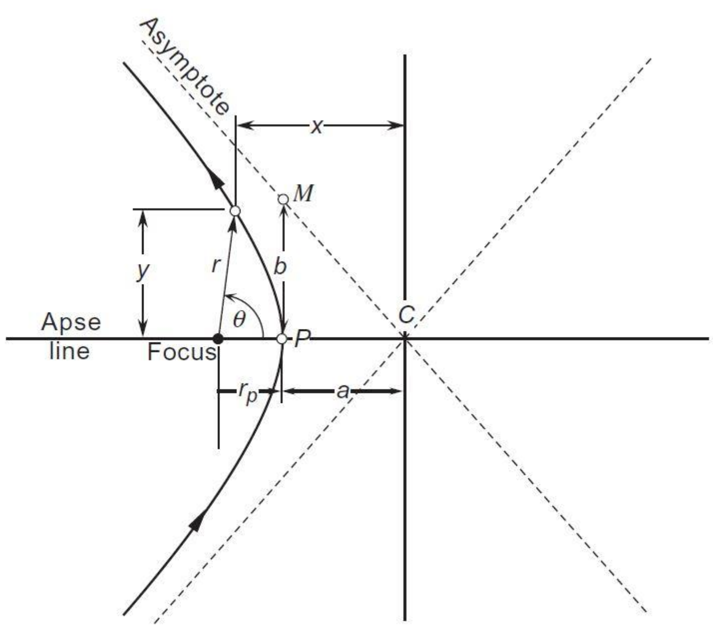
۴- زمان در مدارهای هذلولوی

هذلولی یکی از مقاطع مخروطی است که در شکل ۴ ملاحظه می کنید. معادله دکارتی و قطبی آن به صورت زیر است:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (28)$$

$$r=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta} \qquad (29)$$

که در روابط فوق طبق تعریف a نیم قطر بزرگ هذلولی، b نیم قطر کوچک هذلولی و e خروج از مرکز هذلولی است ($e>1$). تعریف جدیدی که در هذلولی با آن روبرو هستیم خط مجانب است. هر هذلولی دو مجانب دارد که در حد $r\to\infty$ هذلولی به مجانب ها میل می کنند.



شکل ۴) یک شاخه از هذلولی

۴-۱- توابع هیپربولیک

دو تابع $sinh$ و $cosh$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad , \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad (30)$$

علت شباهت نام این دو تابع به سینوس و کسینوس تعاریف مختلط سینوس و کسینوس است(رابطه ۳۱). این شباهت تعاریف موجب می شود که این توابع اتحادهایی مشابه (ولی متفاوت) با اتحاد های مثلثاتی داشته باشند.

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad , \cosh(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad (31)$$

می توان توابع $tanh$ و $coth$ را به طور مشابه تعریف کرد:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \qquad (32)$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \qquad (33)$$

نمایش گرافیکی این توابع را می توانید در شکل ۵ مشاهده کنید.

با استفاده از تعریف توابع هیپربولیک (معادله های ۳۰ و ۳۲ و ۳۳) می توان اتحاد های زیر را به راحتی اثبات کرد:

$$cosh^2 x - sinh^2 x = 1 \qquad (34)$$

$$\cosh(2x) = cosh^2 x + sinh^2 x \qquad (35)$$

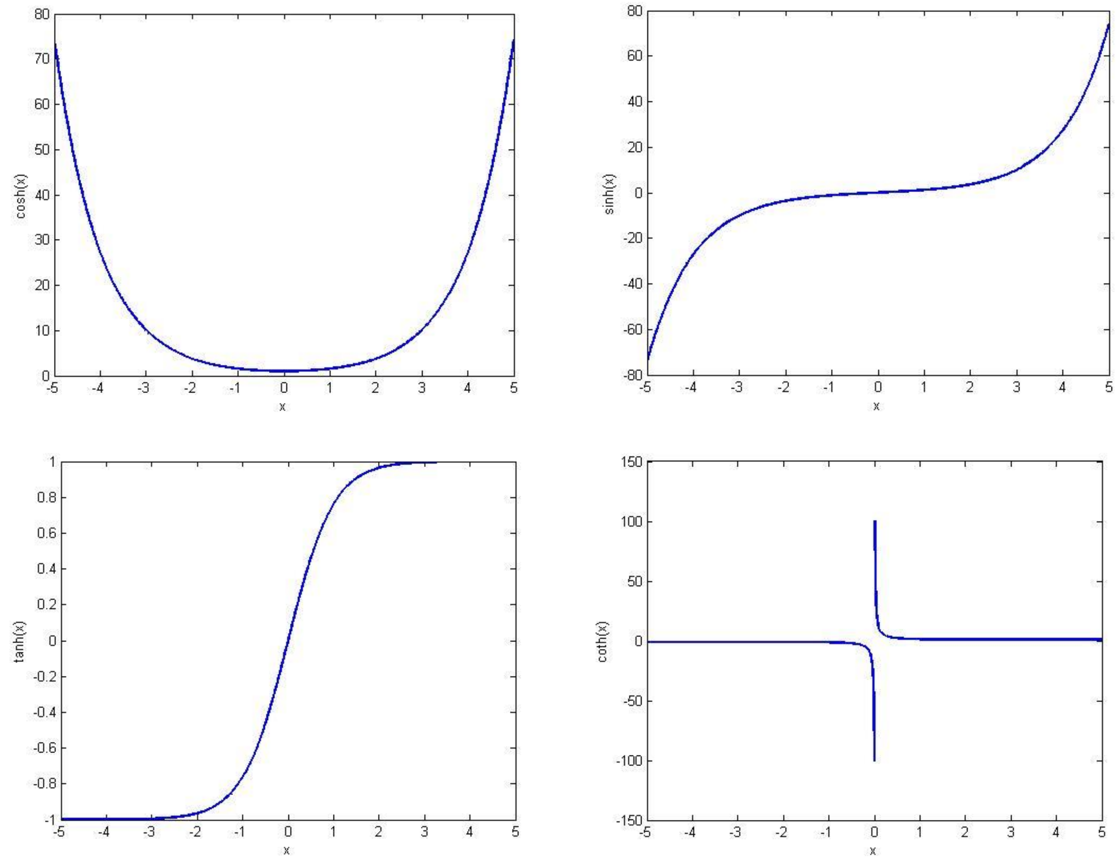
$$\sinh(2x) = 2\sinh x \, . \cosh x \qquad (36)$$

$$cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2} \quad , sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \qquad (37)$$

$$\tanh\frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} \qquad (38)$$

$$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x \quad , \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x \qquad (39)$$

تمرین: روابط ۳۴ تا ۳۹ را اثبات کنید. ■



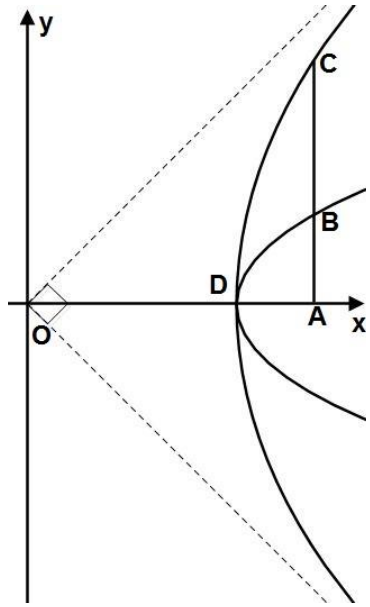
شکل ۵) توابع هذلولوی (هیپربولیک)

۴-۲- هذلولی کمکی

در بیضی برای تعریف آنومالی خروج از مرکزی، از دایره کمکی استفاده کردیم. در هذلولی هم برای تعریف آنومالی خروج از مرکزی از یک هذلولی کمکی استفاده می کنیم. هذلولی کمکی هذلولی‌ای است که قطر بزرگ آن منطبق بر قطر بزرگ هذلولی اصلی است و خروج از مرکز آن $\sqrt{2}$ است، (زاویه بین مجانب های آن ۹۰° است.) معادله این هذلولی در دستگاه دکارتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \to x^2-y^2=a^2 \qquad (40)$$

قضیه: اگر در هر نقطه دلخواه B از هذلولی به محور تقارن عمود کنیم و ادامه دهیم تا هذلولی کمکی را قطع کند (شکل ۶) آنگاه $\frac{AB}{AC}=\frac{b}{a}$



شکل ۶) هذلولی کمکی

اثبات: طول AB برابر با مولفه y هذلولی است و طول AC برابر با مولفه y هذلولی کمکی است.

$$AB = b\sqrt{\frac{{x_A}^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a}\sqrt{{x_B}^2 - a^2} \qquad (41)$$

$$(39) \rightarrow AC = \sqrt{{x_B}^2 - a^2} \qquad (42)$$

با استفاده از روابط ۴۱ و ۴۲ داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{{x_B}^2 - a^2}}{\sqrt{{x_B}^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \qquad (43)$$

قضیه فوق این نتیجه را در بر دارد که نسبت مساحت ABD به مساحت ACD نیز برابر با $\frac{b}{a}$ است یعنی:

$$\frac{A_{ABD}}{A_{ACD}} = \frac{b}{a} \qquad (44)$$

برای هذلولی آنومالی خروج از مرکزی (F) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\cosh F = \frac{x}{a} \qquad (45)$$

با توجه به رابطه دکارتی هذلولی (رابطه ۲۸) و اتحاد ۳۴ نتیجه می‌شود که:

$$\sinh F = \frac{y}{b} \qquad (46)$$

برخلاف حالت بیضی که آنومالی خروج از مرکزی آن یک زاویه بود برای هذلولی آنومالی خروج از مرکزی دیگر یک زاویه نیست. برای یافتن تعبیر هندسی F ابتدا مساحت ACD را می یابیم:

$$A_{ACD} = \int_{x=a}^{x=x_B} \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = a^2 \int_0^F \sqrt{cosh^2 f - 1}\,.\, dcoshf = \ a^2 \int_0^F sinh^2 f\, df$$

از اتحاد ۳۷ استفاده می کنیم:

$$A_{ACD} = a^2 \int_0^F \frac{\cosh(2f) - 1}{2} df = \frac{a^2}{2} (\frac{1}{2} \sinh 2F - F)$$

از اتحاد ۳۶ استفاده می کنیم:

$$A_{ACD} = \frac{a^2}{2} (\sinh F \,.\, \cosh F - F) \qquad (47)$$

اگر مساحت ODC را محاسبه کنیم (شکل ۷) به نتیجه جالبی می رسیم:

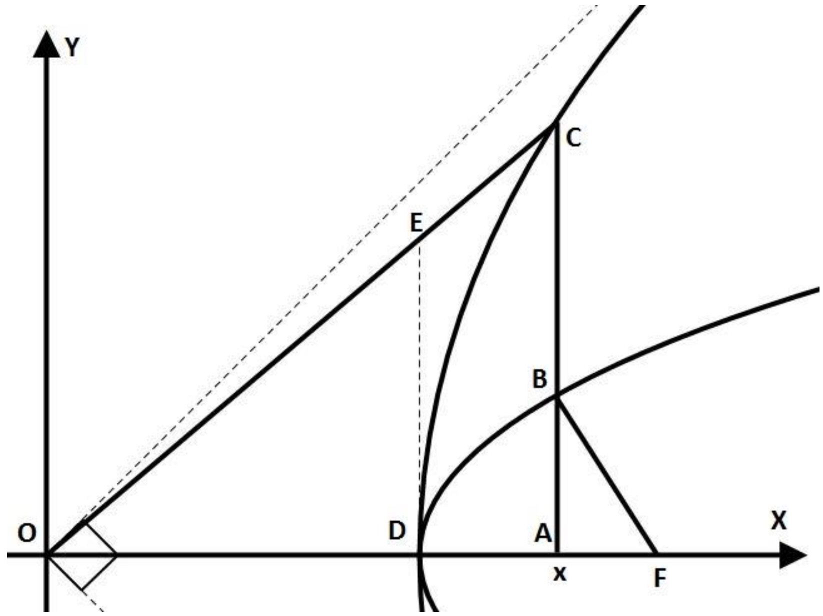
$$A_{ODC} = A_{OAC} - A_{ACD} \qquad (48)$$

$$A_{OAC} = \frac{1}{2} x \left(\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1} = \frac{a^2}{2} \cosh F \,.\, \sinh F \qquad (49)$$

$$(47), (48), (49) \to A_{ODC} = \frac{a^2}{2} F \to F = \frac{2}{a^2} A_{ODC} \qquad (50)$$

حال اگر مساحت ODE را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$A_{ODE} = \frac{a^2}{2} \to F = \frac{A_{ODC}}{A_{ODE}}$$



شکل ۷) نمایش آنومالی خروج از مرکزی هذلولی. F متناسب با مساحت ناحیه ODC است

رابطه r و θ با F نیز به صورت زیر بدست می آید: (با استفاده از اتحاد ۳۸)

$$\frac{y}{a+x} = \frac{b\sinh F}{a(1+\cosh F)} = \sqrt{e^2-1}\tanh\frac{F}{2} \qquad (51)$$

$$\frac{y}{a+x} = \frac{\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}\sin\theta}{a+ae-\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{1+e\cos\theta}{e-1}-\cos\theta} = (e-1)\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$
$$= (e-1)\tan\frac{\theta}{2} \qquad (52)$$

$$(51),(52) \rightarrow \sqrt{e^2-1}\tanh\frac{F}{2} = (e-1)\tan\frac{\theta}{2}$$
$$\rightarrow \tanh\frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2} \qquad (53)$$

و همچنین:

$$ae - a\cosh F = r\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{ae-a\cosh F}{r} \qquad (54)$$

$$(29),(54) \rightarrow r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\left(\frac{ae-a\cosh F}{r}\right)} \rightarrow r + ae^2 - ae\cosh F = a(e^2-1)$$

$$\rightarrow r = a(e\cosh F - 1) \qquad (55)$$

روابط ۵۳ و ۵۵ در مدارهای هذلولی معادل روابط ۸ در مدارهای بیضوی هستند.

۳-۴- معادله کپلر هذلولی

برای استفاده از رابطه ۳ باید مساحت جاروب شده (A_{FBD} روی شکل ۷) را محاسبه کنیم:

$$A_{FBD} = A_{AFB} + A_{ABD} \qquad (56)$$

$$(44),(47) \rightarrow A_{ABD} = \frac{ab}{2}(\sinh F\,.\cosh F - F) \qquad (57)$$

$$A_{AFB} = \frac{1}{2}(ae - a\cosh F)(b\sinh F) = \frac{ab}{2}(e\sinh F - \cosh F\,.\sinh F) \qquad (58)$$

$$(56),(57),(58) \rightarrow A_{FBD} = \frac{ab}{2}(e\sinh F - F) \qquad (59)$$

حال می توان از رابطه ۳ استفاده کرد:

$$(3),(59) \rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{\mu a(e^2-1)}}\frac{a^2\sqrt{(e^2-1)}}{2}(e\sinh F - F)$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(e\sinh F - F) \qquad (60)$$

می توان مشابه تعریف آنومالی میانگین در بیضی در هذلولی هم آنومالی میانگین را به صورت زیر تعریف کرد:

$$M_h = \frac{t}{\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}} \qquad (61)$$

در این صورت رابطه ۶۰ به فرم زیر در می آید:

$$M_h = e\sinh F - F \qquad (62)$$

که به آن معادله کپلر هذلولی می گوییم.

۴-۴- جمع بندی

همانند مدار های بیضوی و سهموی برای مدارهای هذلولوی هم دو با دو نوع مساله ممکن است روبرو شویم:

- چه مدت طول می کشد که جسم از حضیض به نقطه B برسد؟
- جسمی در حضیض است پس از طی شدن زمان t موقعیت جدید جسم کجاست؟

هر دو نوع مساله با استفاده از روابط ۶۲ و ۵۳ قابل حل اند منتها مشابه حالت بیضی مسائل نوع یک مستقیما حل می‌شوند و مسائل نوع دو نیاز به روش های عددی دارند.

تمرین: دنباله داری در مداری با نیم قطر بزرگ ۳ واحد نجومی و خروج از مرکز ۲٫۵ در حال نزدیک شدن به خورشید است چه مدت پس از زمانی که دنباله دار در فاصله ۱۰ واحد نجومی از خورشید قرار دارد به نزدیک ترین فاصله اش از خورشید خواهد رسید؟■

تمرین: موشکی با سرعت ۲۰ کیلومتر بر ثانیه از سطح زمین پرتاب می شود پس از ۲ ساعت حداقل و حداکثر فاصله این موشک از سطح زمین چقدر است؟■

۴-۵- حالت خاص مسیر نیم‌خط

برخی موارد جسم در مداری با انرژی مثبت و تکانه زاویه ای صفر قرار دارد. در این حالت جسم در مسیری به شکل یک نیم خط حرکت می کند. در این حالت به جای استفاده از رابطه ۵۳ که جواب نمی دهد مناسب است که از رابطه ۵۵ استفاده شود.

تمرین: جسمی را از فاصله ۱ واحد نجومی از خورشید به صورت شعاعی با سرعت ۴۵ کیلومتر بر ثانیه پرتاب می‌کنیم جسم پس از گذشت زمان ۱۰۰ روز به چه فاصله ای از خورشید می رسد؟■

۵- قضایای لامبرت و اویلر

۵-۱- صورت و اهمیت قضیه لامبرت

جسمی در حال حرکت در مداری بیضوی با دوره تناوب T و نیم‌قطر بزرگ a می‌باشد. جسم در زمان t_1 در نقطه C_1 قرار دارد که در فاصله r_1 از کانون می‌باشد و در زمان t_2 در نقطه C_2 قرار دارد که در فاصله r_2 از کانون است. فاصله دو نقطه C_1 و C_2 را k می‌نامیم قضیه لامبرت بیان می کند که:

$$\frac{2\pi(t_2-t_1)}{T}=(\epsilon-\sin\epsilon)-(\delta-\sin\delta) \qquad (63)$$

که ϵ و δ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1+r_2+k}{a}}\ ,\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1+r_2-k}{a}} \qquad (64)$$

اهمیت این قضیه در مواردی است که می خواهیم با داشتن دو نقطه از مدار و مدت زمانی که طی می کشد جسم مسیر بین این دو نقطه را طی کند ، مدار را تعیین کنیم، این مساله در طراحی مانور های بین ماهواره ای بسیار متداول است. همچنین با توجه به این که روابط ۶۳ و ۶۴ مستقل از خروج از مرکزند حتی اگر خروج از مرکز مدار برای ما مجهول باشد می توان از این قضیه استفاده کرد.

۵-۲- اثبات قضیه لامبرت

مسیر های متعددی از نقطه C_1 به نقطه C_2 روی مدار وجود دارد. مثلا اگر جسم ساعتگرد در مدارش بچرخد و یا پادساعتگرد بچرخد دو مسیر مختلف را طی می‌کند همچنین ممکن است مسیر هایی را در نظر بگیریم که پس از چند بار چرخش در مدار به نقطه C_2 برسند. در اینجا ما مسیری را مد نظر داریم که کوتاهترین مسیر بین دو نقطه است. هنگامی که جسم در نقطه C_1 قرار دارد آنومالی خروج از مرکزی E_1 دارد و هنگامی که جسم در نقطه C_2 قرار دارد آنومالی خروج از مرکزی E_2 دارد. با توجه به توضیحات فوق:

$$E_2>E_1\ ,\qquad 0\le E_1<2\pi\ ,\qquad E_2-E_1<2\pi$$

می توان G و g را به صورت زیر تعریف کرد:

$$2G=E_2+E_1\quad,\quad 0<G<2\pi \qquad (65)$$

$$2g=E_2-E_1\quad,\quad 0<g<\pi \qquad (66)$$

j را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$e\cos G=\cos j\quad,\quad 0<j<\pi \qquad (67)$$

کمیت های ϵ و δ را فعلا به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\epsilon=j+g\rightarrow 0<\frac{1}{2}\epsilon<\pi \qquad (68)$$

$$\delta=j-g\rightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}\delta<\frac{\pi}{2} \qquad (69)$$

با توجه به رابطه $r=a(1-e\cos E)$ می توانیم بنویسیم:

$$r_1 + r_2 = a\big(2 - e(\cos E_1 + \cos E_2)\big) = 2a(1 - e\cos G\cos g)$$
$$= 2a(1 - \cos j\cos g) \qquad (70)$$

همچنین مقدار k (با توجه به رابطه ۵) برابر است با:

$$k^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = a^2(\cos E_2 - \cos E_1)^2 + a^2(1-e^2)(\sin E_2 - \sin E_1)^2$$
$$= 4a^2 sin^2 G\ sin^2 g + 4a^2(1-e^2)cos^2 G\ sin^2 g$$
$$= 4a^2\ sin^2 g(1 - \ cos^2 j) = 4a^2\ sin^2 g\ sin^2 j$$
$$\rightarrow k = 2a\sin g\sin j \qquad (71)$$

از روابط ۷۰ و ۷۱ نتیجه می گیریم که:

$$\frac{r_1 + r_2 + k}{4a} = \frac{1}{2}(1 - \cos(g + j)) = sin^2\frac{\epsilon}{2} \qquad (72)$$
$$\frac{r_1 + r_2 - k}{4a} = \frac{1}{2}(1 - \cos(g - j)) = sin^2\frac{\delta}{2} \qquad (73)$$

روابط ۷۲ و ۷۳ همان رابطه ۶۴ هستند. از معادله کپلر میدانیم که :

$$\frac{2\pi}{T}\Delta t = \Delta M = (E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1) \qquad (74)$$

از روابط ۶۸ و ۶۹ می دانیم که:

$$\epsilon - \delta = 2g = E_2 - E_1 \qquad (75)$$

$$\sin\epsilon - \sin\delta = \sin(j+g) - \sin(j+g) = 2\cos j\sin g = \frac{2}{e}\cos G\sin g$$
$$= \frac{2}{e}\cos\left(\frac{E_2 + E_1}{2}\right)\sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) = \frac{1}{e}(\sin E_2 - \sin E_1) \qquad (76)$$

با جاگذاری روابط ۷۵ و ۷۶ در ۷۴ خواهیم داشت:

$$\frac{2\pi}{T}\Delta t = \big(\epsilon - \delta\big) - (\sin\epsilon - \sin\delta) = (\epsilon - \sin\epsilon) - (\delta - \sin\delta) \qquad (63)$$

۵-۳- قضیه اویلر

در حدی که $a \rightarrow \infty$ (مدار های سهمی) با توجه به ۷۲ و ۷۳، ϵ و δ کوچک خواهند بود و می توان از بسط تیلور استفاده کرد:

$$\epsilon - \sin\epsilon = \epsilon - \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{6} + \cdots\right) \approx \frac{\epsilon^3}{6}\,, \qquad \delta - \sin\delta \approx \frac{\delta^3}{6} \tag{77}$$

بنابر این رابطه ۶۳ به صورت زیر در می آید:

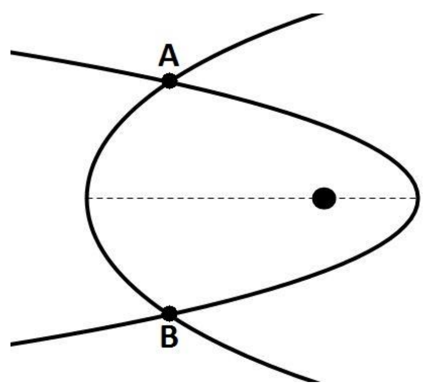
$$\frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{r_1 + r_2 + k}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{r_1 + r_2 - k}{a}\right)^{3/2}\right) \tag{78}$$

می توانیم با استفاده از قانون سوم کپلر مقدار T را جاگذاری کنیم و در نهایت خواهیم داشت:

$$\sqrt{\mu}\,\Delta t = \frac{1}{6}\left((r_1 + r_2 + k)^{3/2} - (r_1 + r_2 - k)^{3/2}\right) \tag{79}$$

که به رابطه ۷۹ "قضیه اویلر" می گویند. در واقع قضیه اویلر در مدار های سهمی معادل قضیه لامبرت در مدارهای بیضوی است و همان کارکرد را دارد.

تمرین: در شکل زیر دو مدار سهموی ممکن حول خورشید برای حرکت از A به B را مشاهده می کنید که فاصله حضیض دو مدار به ترتیب ۰,۵ و ۲ واحد نجومی می باشد.



شکل ۸) دو مدار سهموی که از نقاط A و B می گذرند

الف) بدون استفاده از قضیه اویلر زمان لازم برای حرکت در هرکدام از مسیرها را (بر حسب سال) محاسبه کنید.

ب) با استفاده از قضیه اویلر (۷۹) زمان را محاسبه کنید.

ج) از رابطه زیر زمان را محاسبه کنید:

$$\sqrt{\mu}\,\Delta t = \frac{1}{6}\left((r_1 + r_2 + k)^{3/2} + (r_1 + r_2 - k)^{3/2}\right) \tag{80}$$

د) آیا دو جواب قسمت "الف" با جواب های قسمت "ب" و "ج" برابرند؟■