

به نام حضرت دوست

مجموعه سوالات تسطیح



11th IOAA TEAM
I.R. IRAN

گردآوری شده توسط اعضای یازدهمین تیم جمهوری اسلامی ایران در المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک

❖ توضیحات : این مجموعه سوالات شامل سوالات مطرح شده توسط مدرسان مبحث تسطیح (آقایان یزدان بابازاده و علی زینالی) در دوره چهل تابستانه 95 و همچنین سوالات طرح شده توسط اعضای تیم است . با توجه به کمبود سوالات موجود در این مبحث ، در زمان حل این سوالات تمرکز و دقت کافی روی مسئله داشته باشید تا بر روی ایده های مسئله به صورت کامل فکر کنید . برای مطالعه بیشتر به درسنامه تسطیح مراجعه کنید . پاسخنامه این مجموعه سوال به زودی روی سایت قرار خواهد گرفت .

بخش اول

تمارین دوره تابستانه

1. کره ی آسمان را در نظر بگیرید بصورتی که آنرا به مختصات میل و بعد مجهز کرده ایم و مبدا آن نقطه ی حمل که محل برخورد استوای سماوی و دایره البروج است . حال در نقشه ای که جداگانه به شما داده شده است قرار است کره ی آسمان را به صورت حافظ مساحت تسطیح کنیم .
- الف) می دانیم در چنین تسطیحی ضابطه ی تسطیح به صورت $x = k\alpha$ و $y = c\sin(\delta)$ که در آن c و k دو ثابت مربوط به مقیاس تسطیح هستند ، با توجه به ابعاد تسطیح این ثوابت را بدست بیاورید .
- ب) استوای سماوی را روی نقشه مشخص کنید و سپس نقطه ی حمل را علامت گذاری کنید .
- ج) نقطه ی قطب شمال دایره البروج را روی این نقشه علامت بزنید .
- د) اگر برای یک ناظر مشخص که در عرض جغرافیایی 40 درجه قرار دارد ، Lst برابر با 30 درجه باشد ، نقطه ی سرسو این ناظر را روی نقشه علامت بزنید.
- ه) حال سرسوی ناظری را علامت بزنید که عرض جغرافیایی آن 65 درجه و Lst برابر با منفی 80 درجه است . سمت نقطه ی قطب شمال دایره البروج از دید این ناظر چقدر است ؟

2. کره ی آسمان را در نظر بگیرید بصورتی که آنرا به مختصات میل و بعد مجهز کرده ایم و مبدا آن نقطه ی حمل که محل برخورد استوای سماوی و دایره البروج است . حال در نقشه ای که جداگانه به شما داده شده است قرار است کره ی آسمان را با ضابطه ی تسطیح زیر تسطیح کنیم .

$$T: \{y = c\delta | x = k\alpha\} \text{ که در آن } c \text{ و } k \text{ دو ثابت مربوط به مقیاس نقشه هستند .}$$

الف) ابتدا با توجه به نقشه ی صفحه ی بعد ثوابت c و k را بدست آورید.

ب) حال استوای سماوی را رسم و اعتدال بهاری را روی آن علامت بزنید.

ج) حال نقاط ریشه و اکستریم دایره البروج را روی نقشه علامت بزنید و دایره البروج را به طور تقریبی رسم کنید.

د) حال ستاره ای که میل و بعد آن برابر با 20° و 40° درجه است را روی نقشه علامت بزنید.

ه) حال ناظری را در نظر بگیرید که در عرض جغرافیایی 50° درجه قرار دارد و LST را منهای 20° درجه اندازه میگیرد. نقطه ی سرسوی این ناظر را روی نقشه علامت بزنید.

ک) با توجه به مشخصات ناظر ، نقاط ریشه و اکستریم های افق ناظر را علامت بزنید و شکل تقریبی افق ناظر را رسم کنید

گ) آیا ستاره بخش "د" ، درون افق ناظر قرار دارد؟؟

3. الف) ابتدا معادله کلی ترین دایره صغیره ممکن روی سطح یه کره را در نظر بگیرید و معادله نقاط آنرا بر حسب مختصات مرکز دایره صغیره و شعاع دایره صغیره بدست آورید.
- ب) حال معادله ی این دایره ی صغیره زمانی که توسط تسطیحی با ضابطه ی $T:\{y=c\delta|x=k\alpha\}$ تسطیح می شود را بدست آورید (که در آن C و K دو ثابت دلخواه اند)
- ج) سعی کنید شکل را به صورت کیفی رسم نمایید.
- د) آیا اگر در رابطه ی دایره صغیره ، شعاع را برابر با 90 بگیرید این معادله به معادله دایره عظیمه تبدیل می شود ؟

4. در صفحه ی بعد نقشه ای قرار گرفته است که کره ی آسمان در آن به صورت حافظ مساحت تسطیح شده است . زاویه بعد کنونی ستاره ای که 2000 سال آینده ستاره قطبی خواهد شد را به تقریب محاسبه کنید

فقط مجاز به انجام عملیات هایی روی کاغذ نقشه هستید و اینکه چگونه از نقشه صفحه بعد استفاده کنید به خلاقیت خودتان بر میگردد.

دقت کنید که مجاز به استفاده هیچکدام از روابط مثلثاتی کروی نیستید !

5. در این سوال قصد داریم تسطیح جالبی را معرفی کرده و خواص آنرا بررسی کنیم. ابتدا کره آسمان را در نظر بگیرید که آنرا به دستگاه میل و بعد مجهز کرده ایم.

تسطیحی با ضابطه ی $y = \tan(\delta)$ و $x = \sin(\alpha)$ در نظر بگیرید که در آن δ زاویه میل دستگاه مختصات و α زاویه بعد دستگاه است.

الف) آیا ابعاد این تسطیح محدود است؟

ب) آیا با استفاده از این تسطیح، می توان کل کره را یکجا روی یک کاغذ رسم کرد؟ اگر خیر، چه راه حلی را پیشنهاد میدهید؟

ج) حال معادله ی کلی ترین دایره عظیمه ی ممکن روی سطح کره را بر حسب میل و بعد بنویسید. نشان دهید دایره عظیمه ای که از نقطه ی مبدا میگذرد $\alpha_0 = 0$ در این تسطیح به یک خط می رود. شیب این خط را بدست آورید

د) با استفاده از نتیجه ی این بخش، آیا می تواند استدلالی شهودی برای جواب بخش ب بیاورید؟ از برهان خلف استفاده کنید

د) با توجه به نتایج بخش های قبل، حال با جایگذاری ضابطه ی تسطیح در معادله کلی ترین دایره عظیمه، شکل تسطیح شده ی دایره عظیمه را بدست آورید. آیا می توانید تشخیص دهید که این معادله مربوط به کدام یک از خم های شناخته شده است؟

ه) برای مثال حالت $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ و $\lambda = \frac{\pi}{4}$ را در نظر بگیرید. که در آن λ زاویه دایره عظیمه با استوا است. در این حالت دایره عظیمه به چه خمی می رود؟ این خم را رسم کنید؟

ک) سعی کنید در حالت کلی نیز شکل تقریبی از دایره عظیمه تسطیح شده رسم کنید، آیا خم ها با شهودتان مطابقت دارند؟

6. نقشه ای که در صفحه بعد مشاهده می کنید ، یک تسطیح اسطرلاب با مرکزیت سرسو ناظری در عرض جغرافیایی 30 درجه شمالی می باشد که در آن دایره ی رسم شده افق ناظر است . (دقت کنید که در کل بخش های این سوال از بیرون کره به صفحه مماس نگاه میکنیم)

توجه : در کل روند حل این سوال ، فقط و فقط حق دارید حداکثر یکبار از روابط مثلثات کروی استفاده کنید ، منظور از روابط مثلثات کروی روابط سینوس ها ، کسینوس ها ، چهار جزئی ، قطبی ، قیاسی است . همچنین استفاده از روابط تسطیح اسطرلاب بدون اثبات مجاز است .

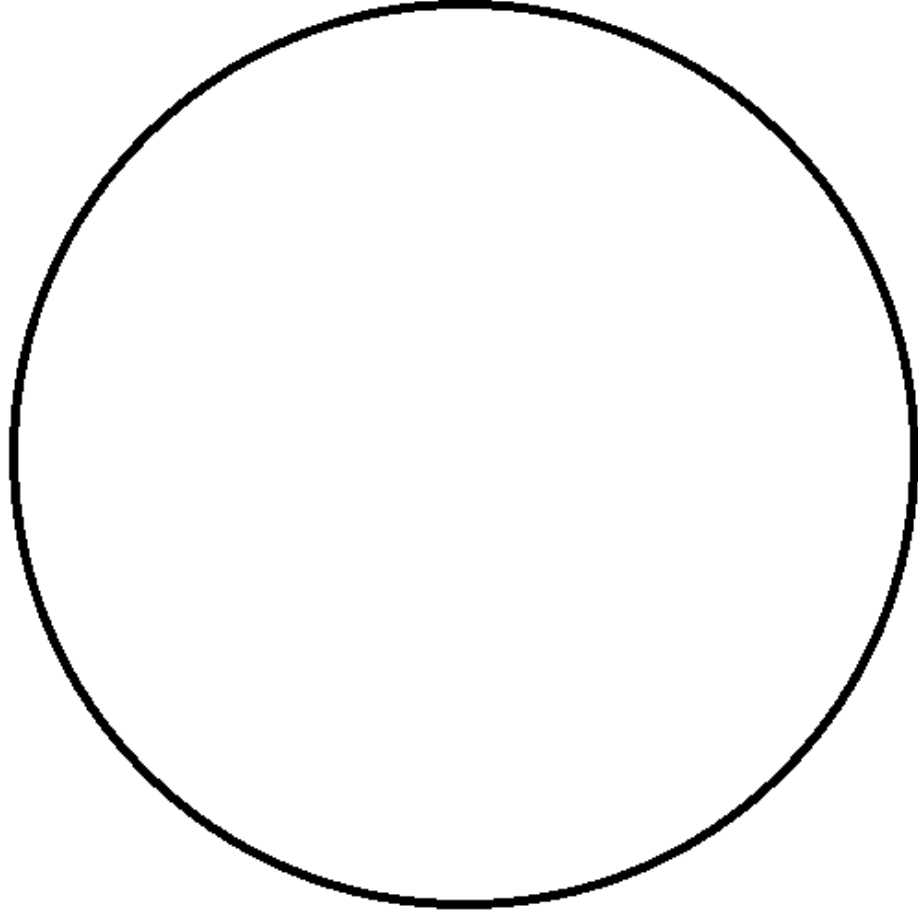
الف) ابتدا مرکز نقشه را مشخص نمایید (نقطه Z) و سپس یک نقطه را بر روی افق به عنوان نقطه ی شمال N مشخص نموده و سپس نقطه ی قطب شمال سماوی P را بر روی شکل نشان دهید .

ب) استوای سماوی را بوسیله ی پرگار روی نقشه ی داده شده رسم کنید.

ج) اگر فرض کنیم که قطب شمال دایره البروج در ارتفاع 30 درجه و در بخش شرقی آسمان قرار دارد ، این نقطه را روی نقشه مشخص کنید .

د) با توجه به اطلاعات بالا دایره البروج را روی نقشه بوسیله ی پرگار رسم نمایید .

ک) دایره البروج در یک نقطه استوای سماوی را قطع کرده است ، ابتدا استدلال کنید که این نقطه کدام اعتدال است و سپس سمت و ارتفاع این نقطه را محاسبه کنید



7. نقشه ی صفحه ی بعد یک تسطیح اسطرلاب با مرکزیت قطب شمال سماوی است که دایره ی رسم شده در آن استوای سماوی است .

الف) ابتدا مرکز نقشه را مشخص نمایید(نقطه ی P) و سپس برای نقطه ی قطب شمال دایره البروج یک سمت گیری دلخواه در نظر بگیرید و با توجه به زاویه میان قطب شمال سماوی و قطب شمال دایره البروج این نقطه را رسم نمایید .

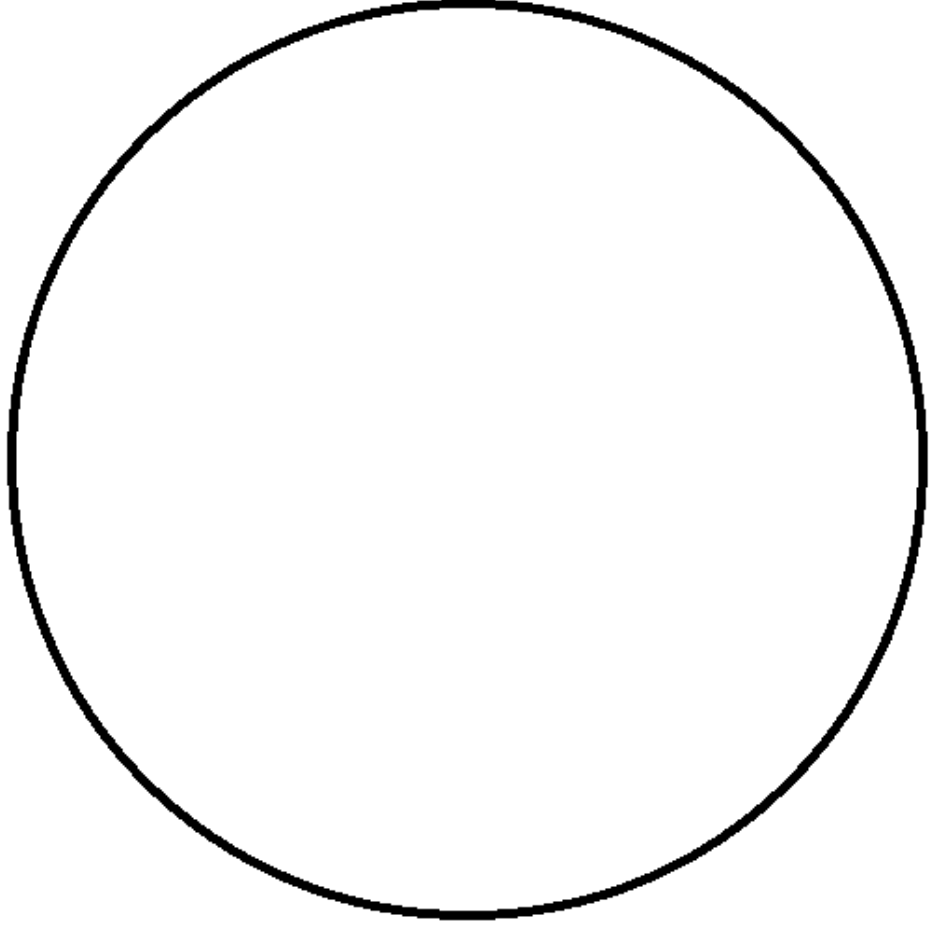
ب) اگر Lst برابر با 5 ساعت باشد ، و ناظر در عرض جغرافیایی 40 درجه شمالی قرار داشته باشد ، سوسو این ناظر را رسم نمایید.

ج) افق ناظر را رسم کنید . آیا قطب شمال دایره البروج در آسمان ناظر در لحظه ی تسطیح مشاهده می شود ؟

د) آیا هیچ کدام از نقاط اعتدالین درون آسمان ناظر دیده می شود ؟ اگر بله استدلال کنید که آن نقطه کدام اعتدال است .

ه) دایره البروج را رسم کنید .

ک) سمت نقاط تلاقی دایره البروج با افق ناظر را بدست آورید .



8. نقشه صفحه بعد مربوط به یک تسطیح اسطرلاب با مرکزیت قطب شمال سماوی است که دایره ی رسم شده در آن استوای سماوی است.

الف) ابتدا مرکز نقشه را مشخص نمایید (نقطه ی P) و سپس برای نقطه ی قطب شمال دایره البروج یک سمت گیری دلخواه در نظر بگیرید و با توجه به زاویه میان قطب شمال سماوی و قطب شمال دایره البروج این نقطه را رسم نمایید .

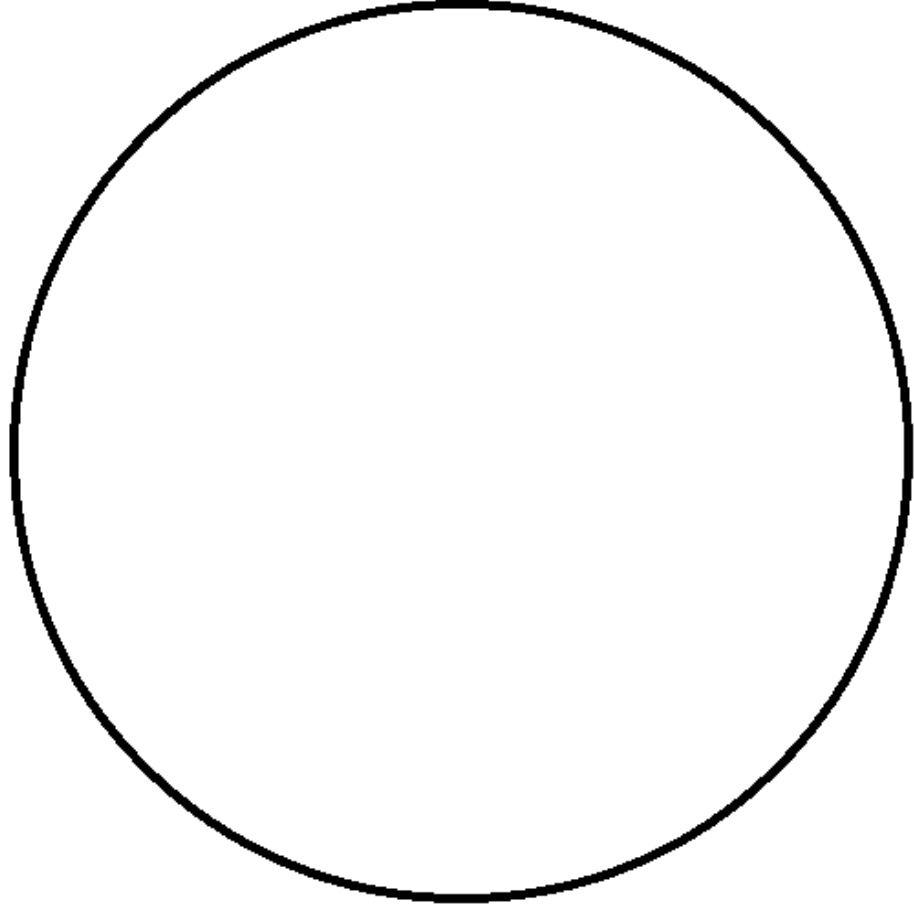
ب) اگر Lst برابر با 10 ساعت باشد ، و ناظر در عرض جغرافیایی 60 درجه شمالی قرار داشته باشد ، سوسو این ناظر را رسم نمایید.

ج) افق ناظر را رسم کنید .

گ) مکان هندسی نقاطی را مشخص کنید که برای ناظر هیچ گاه غروب نمی کنند (هاشور بزیند)

ذ) مکان هندسی نقاطی که ممکن است در آینده قطب شمال سماوی بشوند را مشخص نمایید .

و) نقطه ای را که 10000 سال بعد قطب شمال سماوی می شود را در نقشه مشخص نمایید .



9. نقشه صفحه بعد یک نقشه مرکاتور از کره زمین است که در آن استوا مشخص گردیده است . با توجه به نکات زیر به درخواست های 1 تا 9 پاسخ دهید :

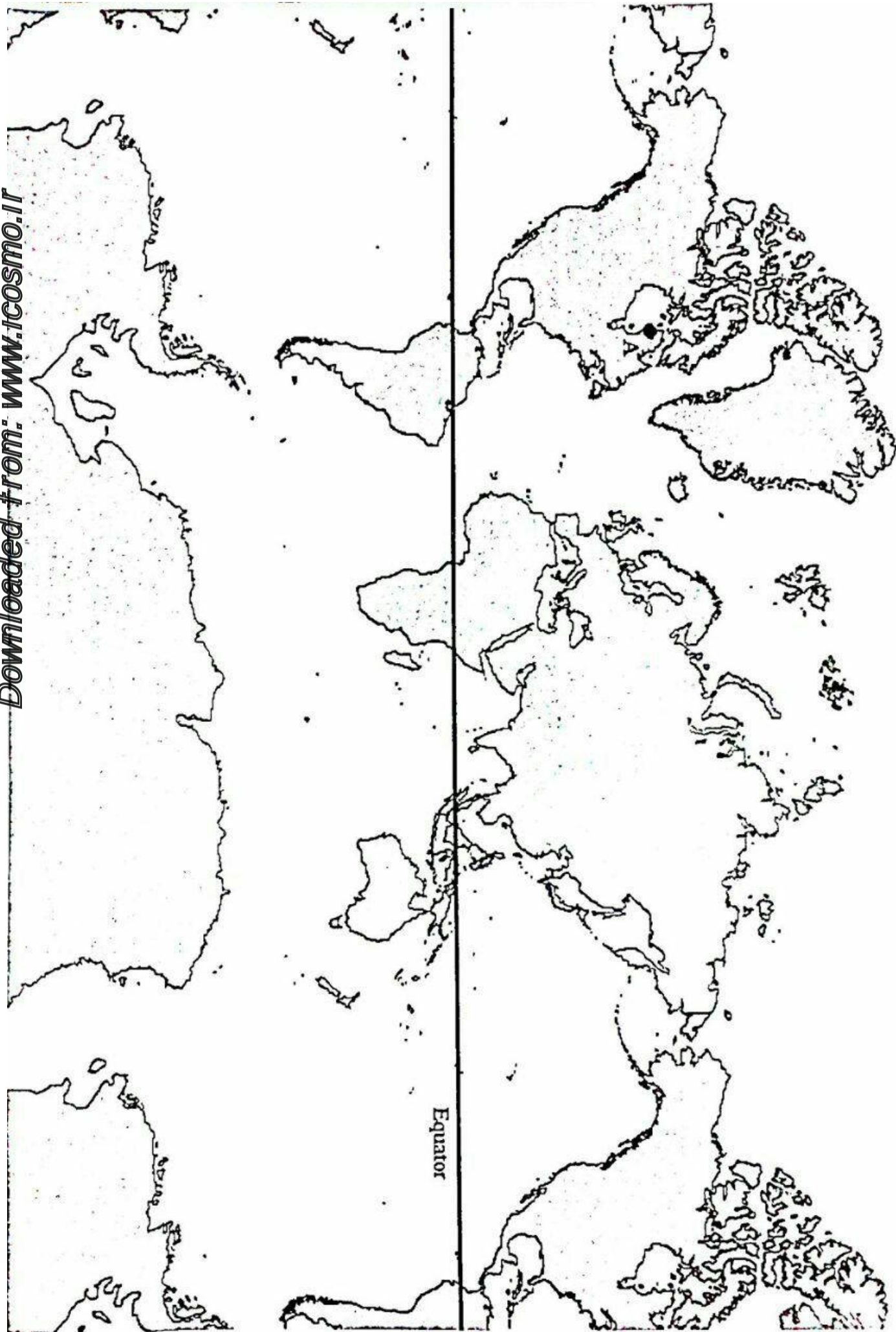
در تمام حل مسئله تاریخ 13 اردیبهشت است و برای ناظری در شهر تهران خورشید در ظهر ظاهری قرار دارد .

مختصات تهران بصورت $altitude = 35.7N$ و $longitude = 51.4E$ می باشد .

نقطه A که در شکل مشخص شده است دارای مختصات زیر است:

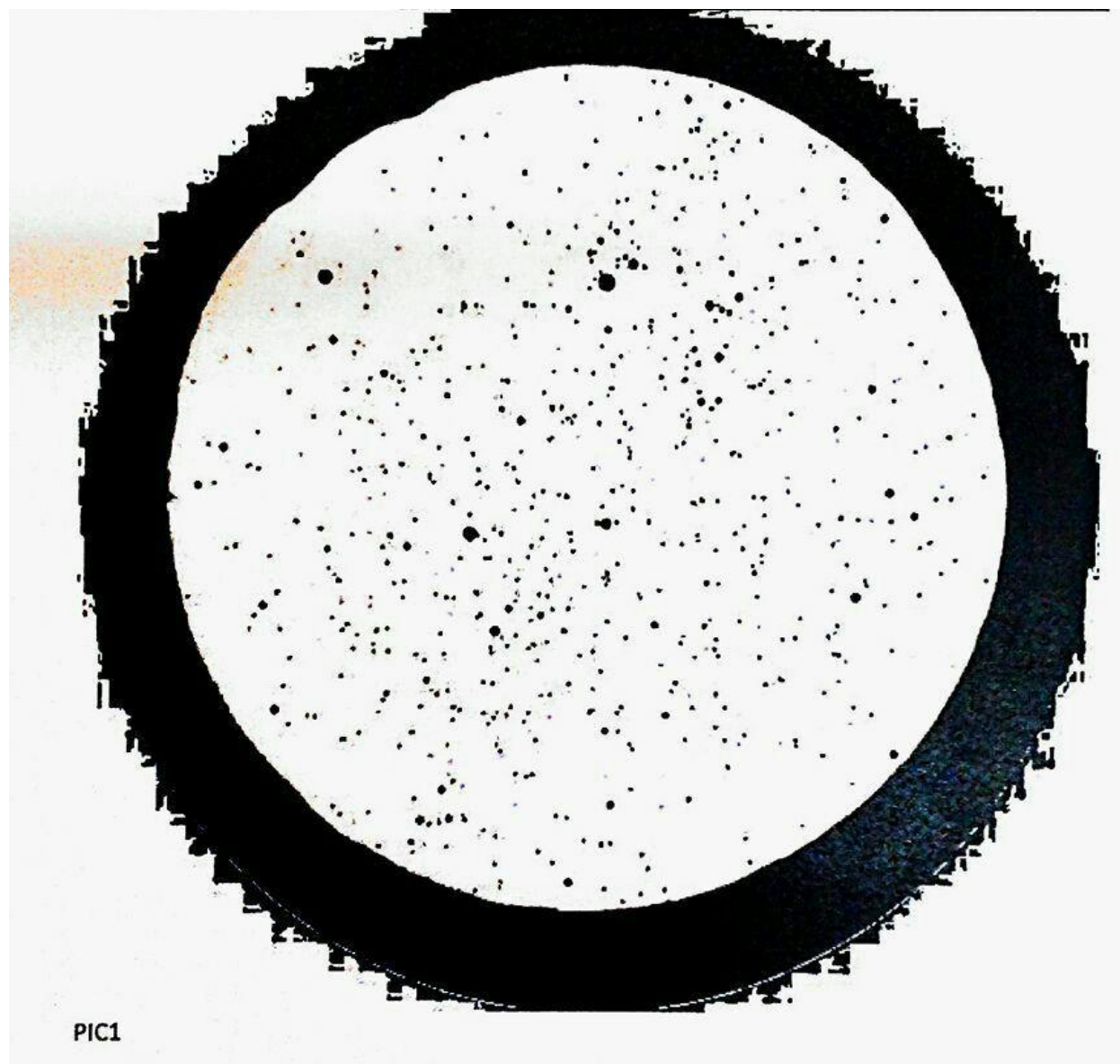
A: $altitude = 60N$ $longitude = 78W$

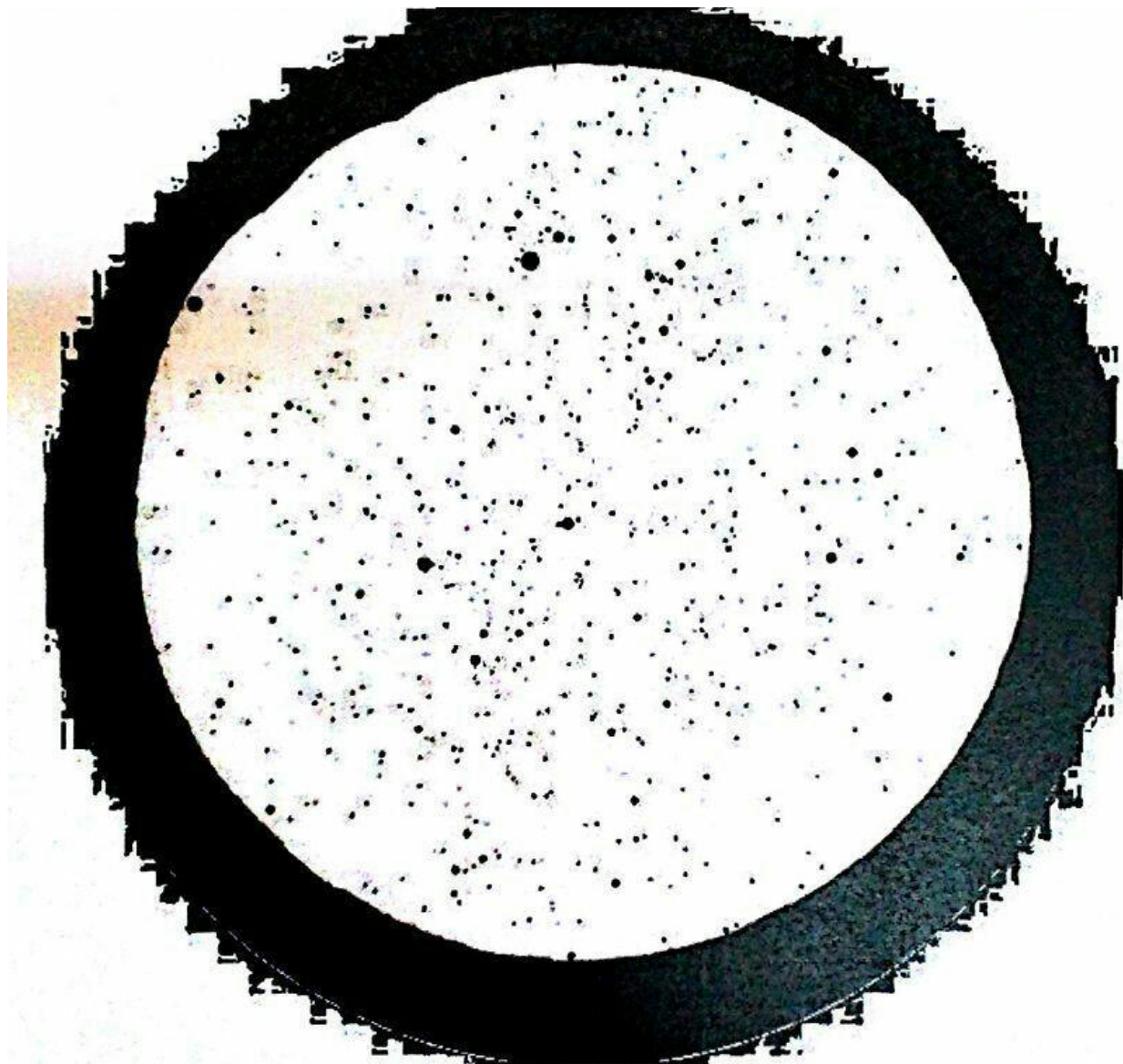
1. شهر Delhi با مختصات $altitude = 28.7N$ و $longitude = 77.1E$ روی نقشه مشخص کنید .
2. شهر Mexico City با مختصات $altitude = 23.6N$ و $longitude = 102.6W$ روی نقشه مشخص کنید .
3. مکزیکوسیتی از دید ناظری در دهلی با چه سمتی دیده می شود ؟
4. *دایره عظیمه ای که بین دو ناظر ارتباط برقرار می کند را بکشید و با خط واصل بین آن ها مقایسه کنید .
5. نقاطی که روی افق دهلی وجود دارند را (نقاطی که شهر دهلی قطب آن است) روی نقشه بصورت خم بکشید .
6. خورشید را روی شکل مشخص کنید .
7. فرض کنید زمین جو ندارد ، مرز بین شب و روز را بصورت یک خم مشخص کنید و معین کنید کجا شب و کجا روز است .
8. فقط با استفاده از نقشه ، سمت خورشید را از دید ناظری در دهلی بدست آورید .
9. فقط با استفاده از نقشه ، ارتفاع خورشید را از دید ناظر دهلی بدست آورید .



10. شکلی که به ما شما داده شده است آسمان ناظری را نشان می دهد که بر روی سیاره ای است که صفحه مداری آن منطبق بر صفحه مداری زمین است . نقشه با روش Stereographic کشیده شده است . عکس دوم حدود 1 ساعت پس از عکس اول گرفته شده است . به درخواست های زیر پاسخ دهید :

1. قطب شمال سماوی را در شکل ها علامت بزنید .
2. استوای سماوی ناظر را بکشید .
3. قطب شمال دایره البروج را در شکل ها علامت بزنید .
4. ناظر در نیمکره شمالی وجود دارد یا جنوبی ؟
5. عرض جغرافیایی ناظر را بدست آورید .
6. سیاره در جهت ساعتگرد به دور خود می گردد یا پادساعتگرد ؟





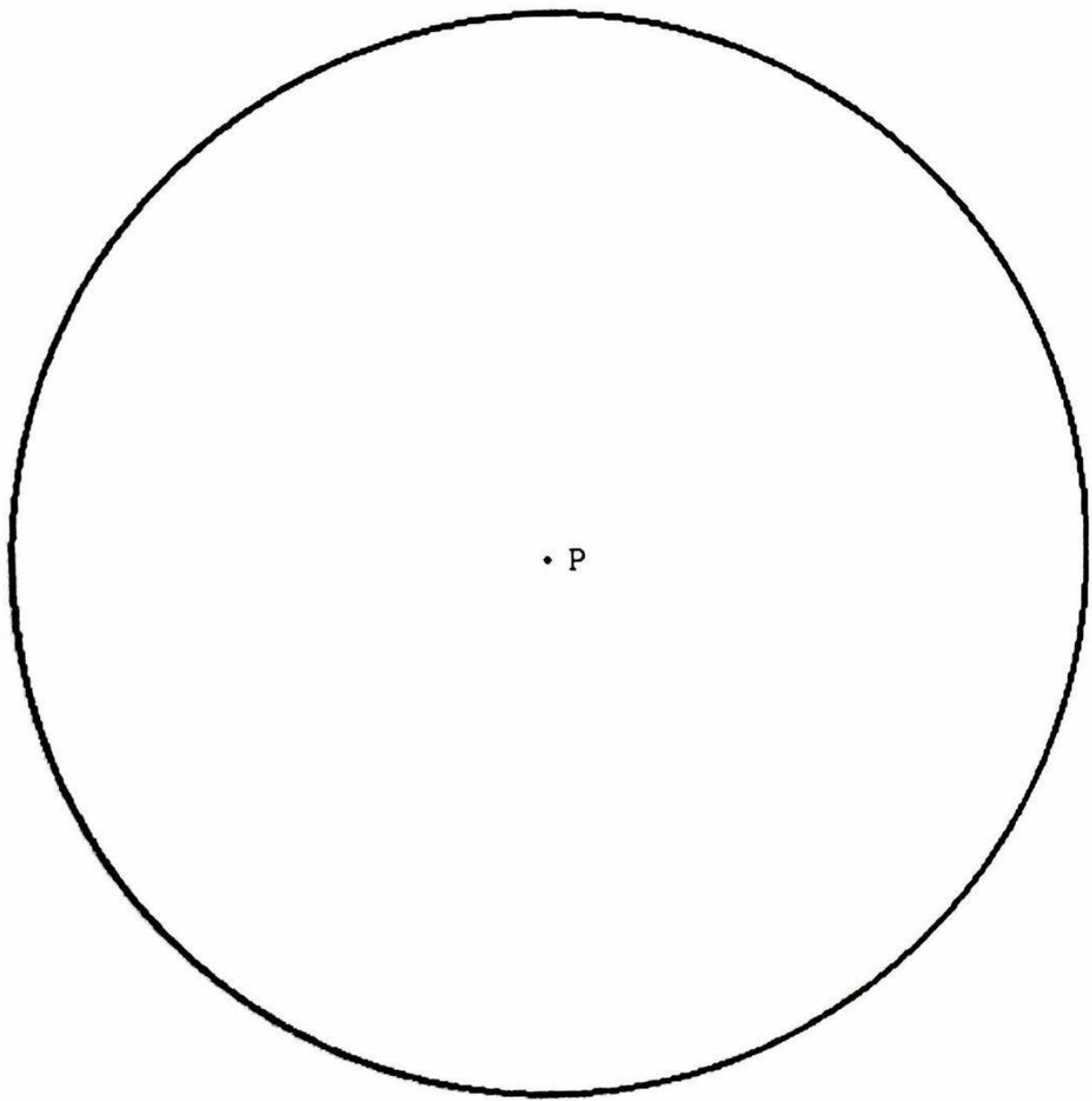
PIC2

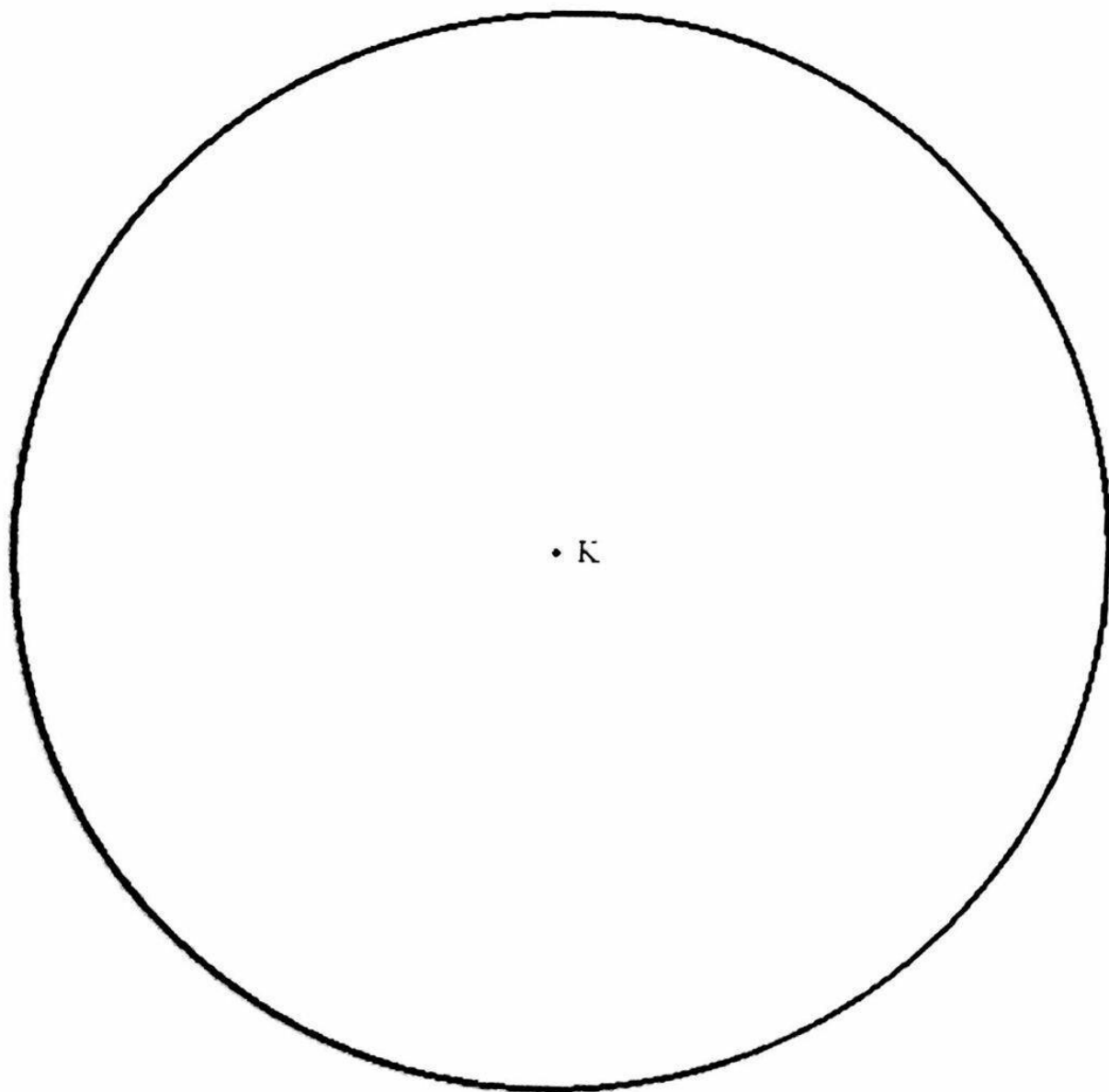
11. در شکلی که به شما داده شده است دو دایره مشخص شده است که در مرکز شکل 1 قطب شمال سماوی و در مرکز شکل 2 قطب شمال دایره البروجی ثبت مشخص شده است .

ستاره ای با مختصات $A: \text{Declination} = 57^\circ$, $\text{Right Ascension} = 6^h 20^m$ مورد نظر است .

به درخواست های زیر پاسخ دهید :

1. در شکل 1 نقطه ای را به عنوان اعتدال بهاری انتخاب کرده و سپس قطب شمال دایره البروج را در شکل علامت بزنید .
2. در شکل 2 نقطه ای را به عنوان اعتدال بهاری انتخاب کرده و سپس قطب شمال سماوی را در شکل علامت بزنید .
3. ستاره A را در شکل 1 علامت بزنید .
4. در شکل 1 ، خطوط طول دایره البروجی برابر با 0 و 90 و 180 و 270 درجه را رسم کنید .
5. در شکل 1 ، با روش نقطه میانی (Bisection) سه خم هم عرض دایره البروجی برای محاسبه مختصات ستاره A بکشید .
6. عرض و طول دایره البروجی ستاره A را به طور تقریبی بدست آورید .
7. ستاره A را در شکل 2 علامت بزنید .
8. در شکل 2 ، خورشید در اول بهار سال 2016 را علامت زده و با S_1 نمایش دهید .
9. در شکل 2 ، قطب شمال سماوی در سال 10016 را علامت بزنید .
10. در شکل 2 ، خورشید در اول بهار سال 10016 را علامت زده و با S_2 نمایش دهید .
11. مختصات نقطه S_1 و S_2 را با همان روش قسمت 4 تا 6 بدست آورید و در شکل 1 علامت بزنید .
12. در نیمه شب اول بهار سال 2016 ، آیا از نظر ناظری در عرض 40 شمالی ، این ستاره دیده می شود ؟
13. در نیمه شب اول بهار سال 10016 ، آیا از نظر ناظری در عرض 40 شمالی ، این ستاره دیده می شود ؟
14. حدودا چند درصد ستارگان آسمان از نظر دو ناظر قسمت 12 و 13 در نیمه شب دیده می شوند ؟





بخش دوم

سوالات طراحی شده توسط اعضای تیم

1. در این سوال می خواهیم مساحت عرقچین را بیابیم.

الف) با استفاده از روش معمول (در نظر گرفتن عرقچین به صورت لایه هایی موازی و انتگرال گیری) مساحت یک عرقچین به شعاع θ_0 را بیابید.

ب) حالا با استفاده از ضابطه ی تسطیح هم مساحت، معادله ی تسطیح دایره صغیره ای به شعاع θ_0 را بیابید.

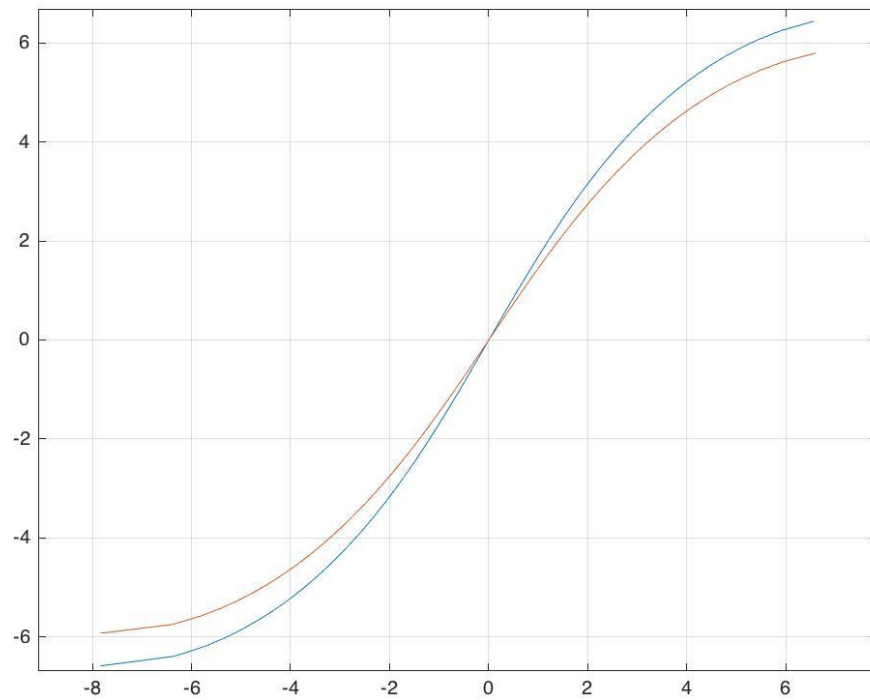
ج) تابع به دست آمده را به صورت کیفی رسم کنید.

د) حال با استفاده از رابطه به دست آمده در قسمت ب رابطه ای برای مساحت یک عرقچین به شعاع θ_0 بیابید و آن را با جواب قسمت الف مقایسه نمایید.

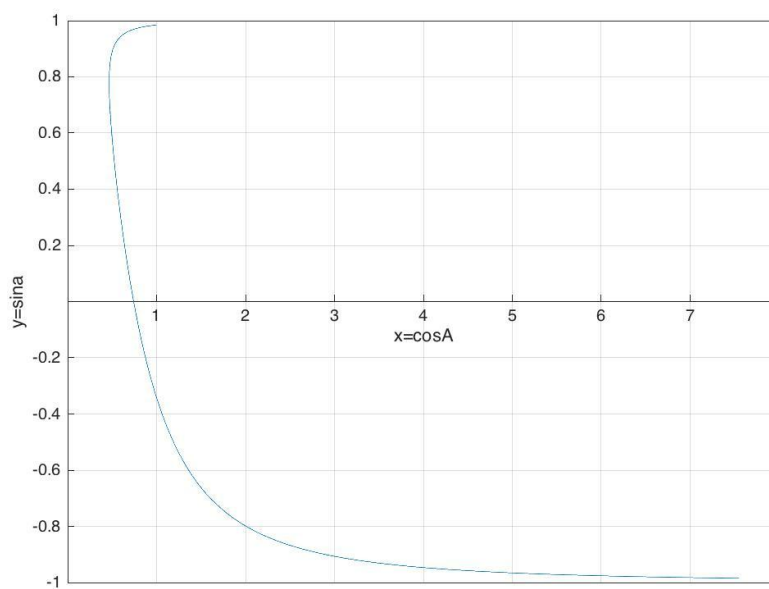
2. قصد داشتیم تلسکوپی را قطبی نماییم اما این کار به دقت صورت نگرفته است و بنابراین محور تلسکوپ به دور نقطه ای که آن را P' می نامیم، می چرخد. با این تلسکوپ به سمت ستاره ای با $\delta = 0^\circ$ نشانه رفته ایم مسیر مرکز تلسکوپ و ستاره هدف گیری شده در آسمان تحت ضابطه تسطیح

$$\begin{cases} y = c \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] \\ x = c A \end{cases}$$

در نمودار صفحه بعد آورده شده است. (خط پررنگ مسیر حرکت ستاره و خط چین مسیر حرکت مرکز تلسکوپ است. فاصله زاویه ای بین P' و P (قطب شمال سماوی) را بدست آورید. (توجه: منحنی آبی مسیر ستاره هدف گیری شده و منحنی قرمز مسیر مرکز تلسکوپ است.)



3. نمودار صفحه بعد نمایانگر مسیر حرکت ستاره ای در آسمان ناظر تحت ضابطه تسطیح $\begin{cases} x = \cos A \\ y = \sin a \end{cases}$ می باشد. عرض جغرافیایی ناظر را بدست آورید.



4. در این سوال نوعی تسطیح جدید به نام دور قطبی را در نظر می گیریم. در این نوع تسطیح هدف نگاشت ستارگان دور قطبی در عرض φ می باشد. صفحه ای را موازی صفحه استوا به گونه ای از کره عبور می دهیم تا نقاط با فاصله φ از P را قطع نماید. (به طوری که ستارگان بالای صفحه پیرا قطبی اند).

خطی از مرکز کره به ستاره مورد نظر وصل می نماییم. محل تقاطع این خط با صفحه مذکور، محل تسطیح ستاره در صفحه می باشد.

الف) ضابطه تسطیحی برای تسطیح دور قطبی بیابید.

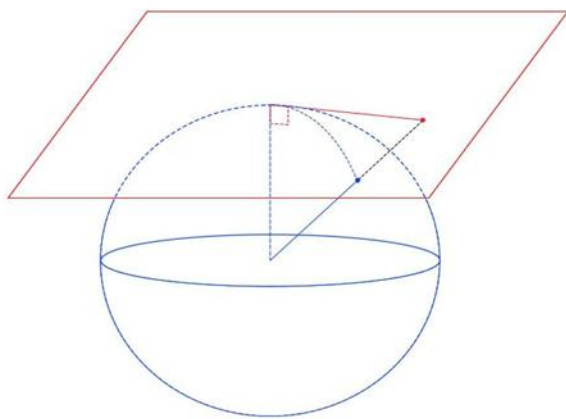
ب) تحقیق کنید که آیا تحت این ضابطه تسطیح، دایره صغیره به دایره ای روی صفحه می رود یا نه؟ چه شرطی لازم است تا چنین شود؟

ج) شکل زیر نشان دهنده تسطیح ستارگان دور قطبی در $\varphi = 30^\circ$ می باشد. (البته در واقع شما باید آن را کامل کنید) فرض کنید رصد خانه ای داریم که دهانه تلسکوپ آن به سمت نقطه ای با $\delta = 70^\circ$ و $\alpha = 10^h$ نشانه رفته است. (میدان دید تلسکوپ را 3° فرض کنید). در شکل زیر محدوده میدان دید تلسکوپ را مشخص نمایید. (یک جهت دلخواه را می توانید برای مبدا سنجش بعد در نظر بگیرید).

د) در همان لحظه ماهواره ای از نقطه ای با $\alpha = 6^h$ وارد محدوده دور قطبی شده و در نقطه ای با بعد $\alpha = 13^h$ از آن خارج می شود. مسیر حرکت ماهواره را در شکل زیر نشان دهید. (از چرخش زمین صرف نظر کنید).

ه) با توجه به قسمت قبل بگویید که به وسیله تلسکوپ رصدخانه آیا می توان ماهواره را مشخص نمود؟

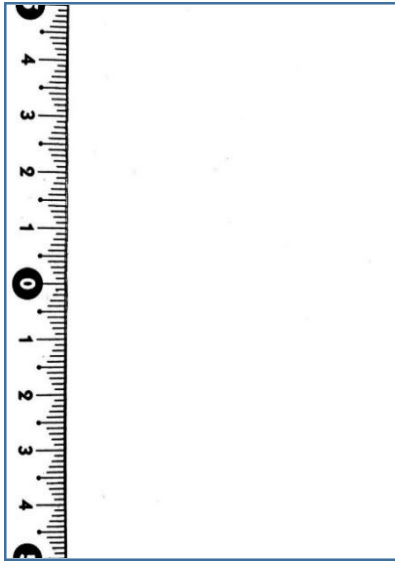
5- با تلفن همراه از تکه کاغذی مثلثی شکل عکس میگیریم (تصویر شماره یک اسکرین شات این عکس است). می دانیم تسطیح دوربین موبایل مانند تسطیح دوربین های دیگر به صورت تسطیح پرسپکتیو است. یعنی اگر لنز دوربین در مرکز کره ای باشد و از آن به سوژه مورد نظر وصل کنیم تسطیح آن در مکانی قرار دارد که صفحه ای که مماس بر مرکز تسطیح است را خط دید آن دوربین قطع کند (تصویر شماره دو). تصویر شماره سه به صورت موازی و از ارتفاع 8.7 سانتی متری از میز گرفته شده است. اگر صفحه نمایش موبایل 12.2×6.9 سانتیمتر مربع باشد و همانطور که میدانید مرکز تسطیح هر دوربینی مرکز تصویر آن است، محاسبه کنید که چند درصد از دید دوربین متعلق به این تکه کاغذ است؟



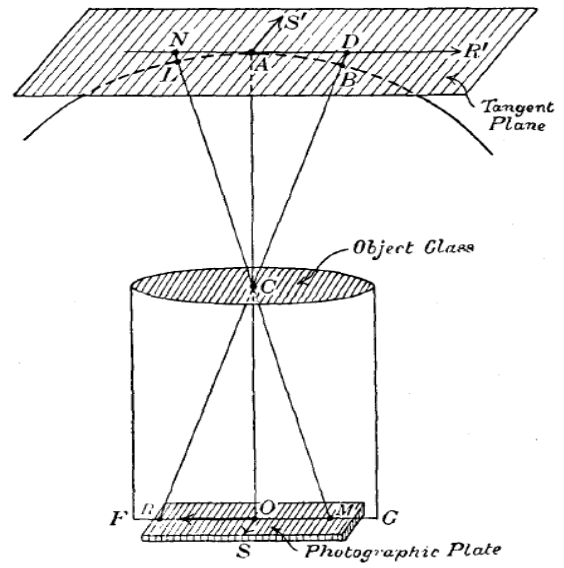
تصویر شماره دو



تصویر شماره یک



تصویر شماره سه



تصویر شماره چهار

موفق خواهند بود!

(A.F.Z)