به نام خدای مهربان

درس‌نامه

آشنایی با مقاطع مخروطی و نقش آن‌ها در مکانیک سماوی

تیم جهانی المپیاد نجوم و اخترفیزیک ۲۰۱۵ اندونزی

فهرست

آشنایی و پیش‌نیاز

در ابتدا باید عرض شود که در این جا قصد بررسی تفصیلی مقاطع مخروطی و توضیح آن چیزهایی که شاید بارها در کتب مختلف مبنی بر اثبات روابط ساده حاکم بر مقاطع مخروطی هست، را نداریم. سعی می‌شود که مطالبی شاید کمی تازه‌تر و یا نگاهی تازه‌تر به مقاطع مخروطی، خدمت شما ارائه شود. بدین منظور آن‌چه که باید به عنوان پیش‌نیاز اجمالی راجع‌به مقاطع مخروطی دانست، در آخر این قسمت می‌آید. متن در دو قسمت بررسی مقاطع مخروطی از دیدگاه ریاضی یا هندسی و مقاطع مخروطی از دیدگاه مکانیک سماوی است. هم چنین قسمت یکی‌مانده به آخر حالت پیوست‌گونه برای علاقه‌مندان قرار داده شده است که مقاطع مخروطی را در فضای مختلط بررسی می‌کند.مطالب با عناوین ستاره‌دار ممکن است تا حدودی دشوار باشند و بنابراین ممکن است در اولویت‌های بعدی شما قرار بگیرند.

سر فصل‌های پیشنهادی ما برای المپیاد نجوم (شاید تا مرحله دو) به صورت زیر است:

- آشنایی و پیش‌نیاز – مقدمه
- مقاطع مخروطی: همه‌اش به جز ؛

معادله کلی مقاطع مخروطی در دو بعد و سه بعد - پیدا کردن x_0 و y_0 و نکاتی مهم در استفاده از $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ در دو بعد – پیدا کردن y_0 ، α و θ و نکاتی مهم در استفاده از معادله مقطع مخروطی در سه بعد–روشی عملی و محاسباتی برای پیدا کردن مشخصات مقطع مخروطی در سه بعد

- بخش "دو روش برای یافتن معادله مقطع مخروطی در دو بعد" هم اختیاری است. اگر توانستید آن را بخوانید.
- مکانیک مقاطع مخروطی: همه‌اش به جز "نگاه به مقاطع مخروطی در فضای مختلط"
- هم‌چنین بهتر است با پیش‌نیاز دانش تقریب زدن تا مرتبه‌های مناسب (قسمتی از علم تقریب و اختلال) به مطالعه قسمت "استخراج معادله زمان سهمی از معادله کپلرِ بیضی" بپردازید.
- حل سؤال‌های بخش زمان در مدار در قسمت مسائل در اولویت مهم شما قرار گیرد.

در این درس‌نامه قصد بررسی کمی و کیفی مقاطع مخروطی را داریم. در ابتدا تعریفی از مقاطع مخروطی بیان می کنیم به این صورت که :

به شکل های حاصل از قطع دادن یک صفحه با یک مخروط راست مقاطع مخروطی گوییم.

مخروط راست: به مخروطی که معمولاً همه می‌شناسیمش گویند! مخروط راست مخروطیست که زاویه‌ی نیم رأس مخروط برای یال‌ها مختلف مخروط برابر باشد.به عبارتی دیگر به مخروطی که اگر صفحه‌ای را عمود بر محور مخروط از آن عبور دهیم، شکل حاصل از تقاطع یک دایره باشد.

و اما مخروط غیر راست می تواند مثال‌های مختلفی داشته باشد.مثلاً این که اگر نقطه‌ای در فضا داشته باشیم و یک دایره هم در جای دیگری از فضا داشته باشیم (که البته لزوماً محور تقارن عمود بر سطح دایره از نقطه نمی‌گذرد)، آنگاه اگر ما از نقطه‌ای که داریم به تک تکِ نقاط روی محیط دایره خط وصل کنیم، آنگاه یال‌های مختلف مربوط ساخته می‌شود و مخروطی شکل می‌گیرد. در این جا باید گفت که لزومی ندارد این مخروط، راست باشد.

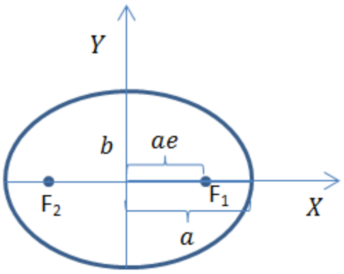
حال می خواهیم ببنیم که آیا واقعاً اگر صفحه‌ای از مخروط عبور دهیم، همان شکل‌های معروف مقاطع مخروطی که می‌شناسیم از جمله بیضی و سهمی و هذلولی حاصل می‌شود یا خیر.

در ابتدا حلی با محاسبات پیچیده‌تر می‌کنیم، سپس حلی ساده‌تر می‌گوییم با خلاقیت بیشتر!

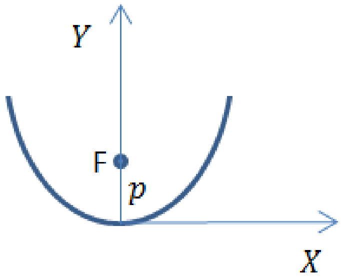
و اما برای حل لازم است اول مقدماتی گفته شود؛ از جمله تبدیل مختصات دستگاه‌های دوران یافته.

و اما قبل از مقدمه، پیش نیازها:

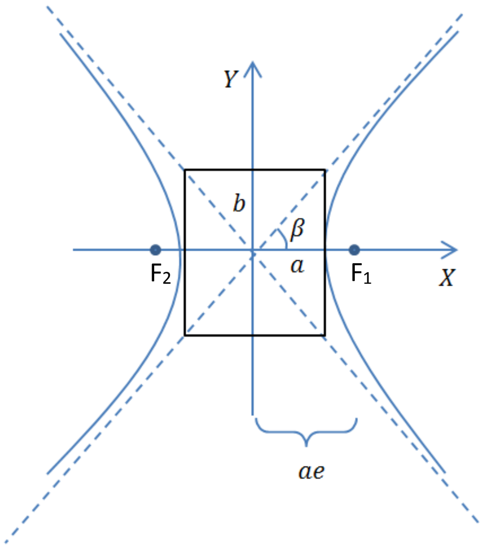
معادله مقاطع مخروطی در دستگاه دکارتی:



بیضی: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



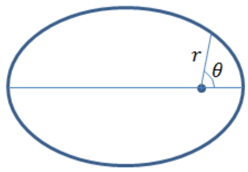
سهمی: $y=\dfrac{x^2}{4p}$



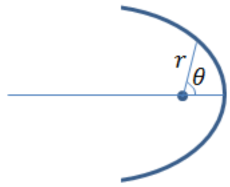
هذلولی: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

در دستگاه مختصات قطبی:

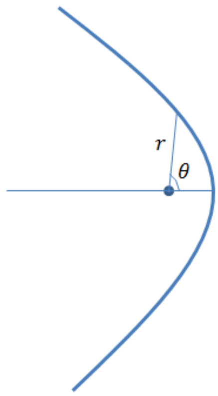
$$r_{\text{بیضی}} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$



$$r_{\text{سهمی}} = \frac{2p}{1+\cos\theta}$$



$$r_{\text{هذلولی}} = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}$$



و با تعاریفِ:

$$b^2_{\text{بیضی}} = a^2(1-e^2)$$

$$b^2_{\text{هذلولی}} = a^2(e^2-1)$$

نصف زاویه‌ی دو مجانب هذلولی را با β نشان می‌دهیم:

$$\beta = \cos^{-1}(\frac{1}{e})$$

رابطه‌ی بالا را در مسئله ۱ اثبات خواهید کرد.

مقدمه

فرض می‌کنیم که یک دستگاه مختصات اولیه XYZ داریم. دستگاه مختصات پریم داری چون X'Y'Z' داریم که مبدأش با مبدأ دستگاه قبل یکیست ولی فقط حول محوری دلخواه در فضا به میزان زاویه‌ای دلخواه گشته است. می‌خواهیم ببینیم اگر مختصات نقطه‌ای در دستگاه اول را داشتیم چگونه مختصات همان نقطه را در دستگاه مختصات پریم دار بیابیم. یعنی اگر داشتیم P(x,y,z) آن گاه چگونه بنویسیم P(x',y',z') و با داشتن x و y و z چگونه برسیم به این که x' و y' و z' چیستند. برای این کار فرض می‌کنیم بردار مکانی داریم به نام $\vec{r}$ در دستگاه مختصات بدون پریم به صورت:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

حال از آن چیزی که شاید به صورت بدیهی در ناخودآگاهمان قبول کرده‌ایم استفاده می‌کنیم.این که x و y وz تصویر بردار مکان روی سه محور X و Y و Z هستند. پس اگر x' و y' و z' را خواستیم باید تصویر بردار مکان را روی سه محور X' و Y' و Z' بیابیم. یعنی :

$$x' = \vec{r}.\widehat{\imath'} = x\left(\hat{\imath}.\widehat{\imath'}\right) + y\left(\hat{\jmath}.\widehat{\imath'}\right) + z(\hat{k}.\widehat{\imath'})$$

$$y' = \vec{r}.\widehat{\jmath'} = x\left(\hat{\imath}.\widehat{\jmath'}\right) + y\left(\hat{\jmath}.\widehat{\jmath'}\right) + z(\hat{k}.\widehat{\jmath'})$$

$$z' = \vec{r}.\widehat{k'} = x\left(\hat{\imath}.\widehat{k'}\right) + y\left(\hat{\jmath}.\widehat{k'}\right) + z\left(\hat{k}.\widehat{k'}\right)$$

یا به عبارت ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{\imath}.\widehat{\imath'}) & (\hat{\jmath}.\widehat{\imath'}) & (\hat{k}.\widehat{\imath'}) \\ (\hat{\imath}.\widehat{\jmath'}) & (\hat{\jmath}.\widehat{\jmath'}) & (\hat{k}.\widehat{\jmath'}) \\ (\hat{\imath}.\widehat{k'}) & (\hat{\jmath}.\widehat{k'}) & (\hat{k}.\widehat{k'}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ره‌یافتی جالب که در کتاب دینامیک کلاسیک ذرات و سیستم‌ها به آن اشاره شده است برای حفظ شدن ماتریس دوران، به این صورت است که تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_{ij} = \cos(i', j)$$

یعنی از مولفه‌ی پریم دار اندیس اول و مؤلفه‌ی بدون پریم اندیس دوم استفاده می‌کنیم.هم چنین محورهای X و Y و Z را به ترتیب ۱ و۲ و۳ و محورهای X' و Y' و Z' را به ترتیب $'$۱و $'$۲و$'$۳ می‌نامیم و از این به بعد کارمان راحت است چرا که به جای استفاده از روابط جبری شاید بعضاً پیچیده و برداری برای تبدیل مختصات‌ها، می توانیم از جبر ماتریس‌ها بهره بگیریم.به خصوص این جبر موقعی به کمکمان می‌آید که بخواهیم از چند تبدیل استفاده کنیم و به راحتی می‌توانیم ماتریس‌ها را در هم ضرب ماتریسی کنیم.حال داریم:

$$\begin{bmatrix} (\hat{\imath}.\widehat{\imath'}) & (\hat{\jmath}.\widehat{\imath'}) & (\hat{k}.\widehat{\imath'}) \\ (\hat{\imath}.\widehat{\jmath'}) & (\hat{\jmath}.\widehat{\jmath'}) & (\hat{k}.\widehat{\jmath'}) \\ (\hat{\imath}.\widehat{k'}) & (\hat{\jmath}.\widehat{k'}) & (\hat{k}.\widehat{k'}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}$$

مسلماً به خاطر سپردن ماتریس سمت چپ راحت‌تر است. که اندیس اول هر درایه نمایشگر سطر درایه است و اندیس دوم نمایشگر ستون است.

۱– مقاطع مخروطی

ره‌یافت تحلیلی

با این مقدمه، فرض می‌کنیم که در دستگاه XYZ مخروط راستی داریم که محور آن محور Z است و نقطه‌ی رأس آن مبدأ مختصات است. هم‌چنین زاویه‌ی نیم رأس مخروط را α فرض می‌کنیم. چون که در هر z ای از مخروط اگر صفحه‌ای موازی XY رد دهیم از مخروط، مقطع به دست آمده دایروی خواهد بود فقط به ازای zهای مختلف، شعاع‌های دوایر مختلف می‌باشند. پس معادله مخروط راست می‌شود:

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$$

حال صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم که با صفحه‌ی XY زاویه‌ی θ می‌سازد و عمود بر صفحه‌ی ZY است.(این فرض اخیر به خاطر تقارن مخروط حول محور Z به کلیت مسأله ضربه‌ای وارد نمی‌کند). هم چنین فرض می‌کنیم صفحه، محور Z را در z_0 قطع کنند. معادله‌ی چنین صفحه‌ای در فضا می شود معادله‌ی خطی در صفحه‌ی YZ که با محور Y زاویه θ می‌سازد. این حرف چرا درست است؟ چون صفحه‌ی مورد نظر (آن را p می‌نامیم) بر صفحه YZ عمود است لذا به ازای y و z مشخص، هر x ای می‌تواند داشته باشد و قیدِ خط فقط روی y و z آن ظاهر می‌شود. از این رو معادله‌ی p می‌شود:

$$z = z_0 + y \tan \theta$$

حال کافیست که معادله‌ی p و مخروط را با هم ادغام کنیم به معادله‌ی فصل مشترک برسیم. ولی قبل از آن ترجیح می‌دهیم که دستگاه مختصات دوران یافته‌ای را اختیار کنیم به طوری که مبدأش روی محور Z و در z_0 قرار گرفته و محور X' موازی X و به اندازه‌ی z_0 بالاتر از آن و محور Y' به اندازه θ با Y زاویه دارد و محور Z' با Z به اندازه θ زاویه دارد. به عبارتی دیگر، ابتدا دستگاه اولیه را یک انتقال به اندازه z_0 در راستای Z دادیم و سپس حول محور X' به اندازه θ به صورت پادساعتگرد چرخاندیم. حال دستگاه مختصات سوم را دستگاه مختصاتی تعریف می‌کنیم که مبدأش با

پریم‌دار یکیست ولی دیگر دستگاه سوم به اندازه زاویه θ حول 'X نچرخیده و به صورت اولیه باقی مانده‌است. هم چنین به جای پریم برای مؤلفه‌ها از ('') استفاده می‌کنیم. برای تبدیلات بین دستگاه دوم و سوم داریم:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

و هم چنین بدیهی است که :

$$x'' = x$$

$$y'' = y$$

$$z'' = z - z_0$$

حال کار ما اینست که ببینیم معادله‌ی مقطع تقاطع p و مخروط برای دستگاه پریم‌دار چیست. برای مقطع مشترک داریم:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2\tan^2\alpha &= (z_0 + y\tan\theta)^2\tan^2\alpha \\ &= z_0^2\tan^2\alpha + y^2\tan^2\theta\tan^2\alpha + 2yz_0\tan\theta\tan^2\alpha \end{aligned}$$

در این معادله همه ی مؤلفه‌ها بدون پریم‌اند و ما باید آن‌ها را به پریم دار تبدیل کنیم.هم چنین می‌دانیم که چون دستگاه مختصات پریم دار را طوری تعریف کردیم که زاویه‌ی شیبش نسبت به XY با زاویه شیب p برابر است و مبدأش در همان جایی قرار دارد که p محور Z را قطع می‌کند لذا برای همه‌ی نقاط سطح مقطع مشترک داریم: z'=0 در ادامه:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z - z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y\cos\theta + (z - z_0)\sin\theta \\ -y\sin\theta + (z - z_0)\cos\theta \end{bmatrix}$$

با توجه به فرض گفته شده:

$$\begin{aligned} y\sin\theta = (z - z_0)\cos\theta \Longrightarrow y' &= \frac{(z - z_0)\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta + (z - z_0)\sin\theta \\ &= \frac{(z - z_0)}{\sin\theta} \Longrightarrow z = z_0 + y'\sin\theta \ \Longrightarrow y = \frac{y'\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = y'\cos\theta \end{aligned}$$

البته نتایجی را که در بالا به دست آوردیم به طور شهودی بدون ماتریس دوران هم می‌شد به دست آورد. (چگونه؟) حال مؤلفه‌های پریم‌دار را جایگزین بدون‌پریم‌ها می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & x'^2 + y'^2\cos^2\theta \\ &\qquad = z_0^2\tan^2\alpha + {y'}^2\cos^2\theta\tan^2\theta\tan^2\alpha + 2y'z_0\cos\theta\tan\theta\tan^2\alpha \\ &\qquad = z_0^2\tan^2\alpha + {y'}^2\sin^2\theta\tan^2\alpha + 2y'z_0\sin\theta\tan^2\alpha \end{aligned}$$

این می‌شود معادله‌ی مقطع در دستگاه پریم دار و ما به هدف خود رسیده‌ایم.ولی کمی زیباسازی نیاز دارد:

$$x'^2 + y'^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha) - 2y'z_0\sin\theta\tan^2\alpha = z_0^2\tan^2\alpha$$

$$\frac{x'^2}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)} + y'^2 - \frac{2y'z_0\sin\theta\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)} = \frac{z_0^2\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)}$$

قسمت مربوط به y' طرف چپ تساوی را می‌توان به صورت مربعی کامل درآورد:

$$\frac{x'^2}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)} + \left[y'^2 - \frac{2y'z_0\sin\theta\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)} + \frac{z_0^2\sin^2\theta\tan^4\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}\right] - \frac{z_0^2\sin^2\theta\tan^4\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)^2} = \frac{z_0^2\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)}$$

$$\begin{aligned}\frac{x'^2}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)} + \left(y' - \frac{z_0\sin\theta\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)}\right)^2 &= \frac{z_0^2\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)} + \frac{z_0^2\sin^2\theta\tan^4\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)^2} \\ &= \frac{z_0^2\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)}\left(1 + \frac{\sin^2\theta\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)}\right) \\ &= \frac{z_0^2\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)}\left(\frac{\cos^2\theta}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)}\right) \\ &= \frac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}\end{aligned}$$

از این‌جا به بعد مسئله را به سه قسمت تقسیم بندی می‌کنیم:

۱- $\tan\theta < \frac{1}{\tan\alpha}$

۲- $\tan\theta = \frac{1}{\tan\alpha}$

۳- $\tan\theta > \frac{1}{\tan\alpha}$

به ازای حالت اول داریم:

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha > 0$$

بار دیگر معادله مقطع مخروطی را می‌نویسیم:

$$\frac{x'^2}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha)}+\left(y'-\frac{z_0\sin\theta\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha)}\right)^2=\frac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}\ \Rightarrow$$

$$\frac{x'^2}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha).\frac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}}+\frac{\left(y'-\frac{z_0\sin\theta\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha)}\right)^2}{\frac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}}=1$$

به ازای حالت ۱ مخرج 'x مثبت می‌شود و مخرج 'y هم که همیشه مثبت است. آیا معادله زیر برای شما آشنا نیست؟

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

همان طور که احتمالاً می‌دانید این معادله‌ی یک بیضی است.اگر بیضی را به اندازه y'_0 در راستای مثبت محور y ها حرکت دهیم بدیهی است که معادله می‌شود:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{(y'-y'_0)^2}{b^2}=1$$

که در آن‌ها a نیم قطر بیضی در راستای 'x و b نیم قطر بیضی در راستای y است. در اینجا فعلاً از کلمات نیم قطر بزرگ و کوچک استفاده نکردیم چرا که ممکن است دردسرساز باشد! اگر از شما بپرسیم که خروج از مرکز بیضی چیست شاید پاسخ خواهید داد:

$$b^2=a^2(1-e^2)\Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

خوب، اگر b بزرگ‌تر از a بود چه؟ مسلم است که جواب شما که البته منطقی هم هست خواهد بود:

$$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$$

پس می‌بینیم که به صرف دانستن ضرایب زیر x' و y' نمیتوانیم از فرمول معروف $b^2 = a^2(1-e^2)$ استفاده کنیم و اول باید ببینیم کدام طول بیشتر است و بعد:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\text{نیم قطر کوچک}^2}{\text{نیم قطر بزرگ}^2}}$$

داریم:

$$(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha) = \cos^2\theta\,(1 - \tan^2\theta\tan^2\alpha)$$

در حالت مورد بحث $\tan\theta\tan\alpha < 1$ لذا $\cos^2\theta\,(1 - \tan^2\theta\tan^2\alpha) < 1$

یعنی مخرج x' کوچک‌تر از مخرج y' است پس:

$$e = \sqrt{1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha).\frac{\dfrac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}}{\dfrac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}}}$$

$$= \sqrt{1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)} = \sqrt{\sin^2\theta\,(1 + \tan^2\alpha)}$$

$$e = \frac{\sin\theta}{\cos\alpha}$$

حال حالت دو را بررسی می‌کنیم: $\cos^2\theta = \sin^2\theta\tan^2\alpha$

از جهتی که مخرج صفر می‌شود لذا باید از فرم اولیه‌ی تقسیم ناشده یعنی:

$$x'^2 + y'^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha) - 2y'z_0\sin\theta\tan^2\alpha = z_0^2\tan^2\alpha$$

استفاده کنیم که می‌شود:

$$x'^2 - 2y'z_0\sin\theta\tan^2\alpha = z_0^2\tan^2\alpha \Longrightarrow y' = \frac{x'^2}{2z_0\sin\theta\tan^2\alpha} - \frac{z_0^2\tan^2\alpha}{2z_0\sin\theta\tan^2\alpha}$$

اگر به معادله‌ی سهمی‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد دقت کنیم:

$$y' = \frac{x'^2}{4p}$$

که در آن p طول حضیض سهمی است، می‌بینیم که اگر کل سهمی را به اندازه y'_0 در راستای مثبت محور Y' حرکت دهیم داریم:

$$y' = \frac{x'^2}{4p} - y'_0$$

که فرمش شبیه معادله‌ای است که در آوردیم لذا مقطع مخروطی به دست آمده یک سهمی است.

در حالت سوم داریم: $\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha < 0$

که می‌گوید در این حالت مخرج x' منفی است و لذا داریم:

$$-\frac{x'^2}{(\sin^2\theta\tan^2\alpha - \cos^2\theta).\frac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}} + \frac{\left(y' - \frac{z_0\sin\theta\tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)}\right)^2}{\frac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}} = 1$$

حال دو تا مخرج مثبتند. معادله‌ی بالا ما را به یاد:

$$-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{(y' - y'_0)^2}{b^2} = 1$$

می‌اندازد که معادله‌ی یک هذلولی است که خط واصل مبدأ و حضیض‌ها روی محور y است. برای خروج از مرکز هذلولی چه کنیم؟ آیا اینجا هم این محدودیت را داریم که نسبت طول کوچک به طول بزرگ را حساب کنیم؟ مسلماً نه. چون که در حالت هذلولی داریم:

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Longrightarrow e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

و می‌بینیم که زیر رادیکال دیگر به منفی شدن تهدید نمی‌شود! پس در اینجا دقیقاً همان جهات مهم هستند. یعنی a مربوط به راستایی است که دو حضیض را به هم وصل می‌کند و b راستای عمود بر آن است.پس در مسئله‌ی ما، a می‌شود مربوط به مخرج y' (چرا که به طور شهودی حضیض‌ها در راستای Y' اند) و b می‌شود مربوط به مخرج x'. به عبارت دیگر وقتی معادله‌ی:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

را نوشتیم و سپس از

$$b^2=a^2(e^2-1)$$

استفاده کردیم برای به دست آوردن طول مشخصه عمودی (b)، به صورت ضمنی این کار را کردیم؛ دیدیم علامت پشت کدام یک از مختصه‌های ما منفی است، ضریب مخرج آن را b گذاشتیم و کدام یک از مختصه‌ها مثبت است و ضریب مخرج آن را a گذاشتیم. در این جا هم همین‌طور است. اگر بخواهیم از معادله b بر حسب a درست استفاده کنیم باید طبق بیان بالا تعریف خود را درست کنیم. پس حال که در این مسئله پشت x^2 علامت منفی است، در نتیجه مخرج زیر x^2 برابر است با b^2 و مخرج زیر y^2 برابر است با a^2. در نتیجه:

$$e=\sqrt{1+(\sin^2\theta\tan^2\alpha-\cos^2\theta).\frac{\frac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}}{\frac{z_0^2\cos^2\theta\ \tan^2\alpha}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha)^2}}}$$

$$=\sqrt{\sin^2\theta\,(1+\tan^2\alpha)}$$

$$e=\frac{\sin\theta}{\cos\alpha}$$

جالب است که فرم معادله‌ی خروج از مرکز هذلولی با فرم خروج از مرکز بیضی یکی شد و در واقع با خروج از مرکز سهمی هم یکی است؛ در حالت سهمی داریم:

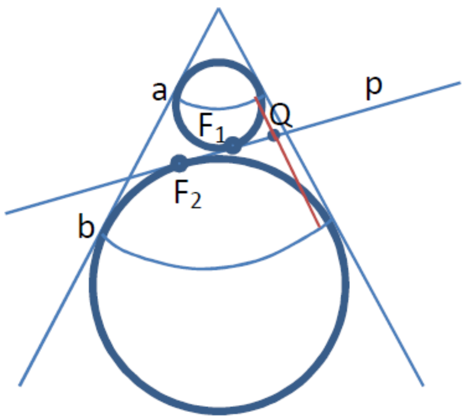
$$\tan\theta\tan\alpha=1\ \Longrightarrow\ \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha\ \Longrightarrow \sin\theta=\cos\alpha$$

پس اگر از فرمول $e=\frac{\sin\theta}{\cos\alpha}$ استفاده کنیم به درستی به ما $e=1$ را نتیجه می‌دهد.

به این نتیجه می‌رسیم که عملاً مقاطع مخروطی از یک جنسند(چیزی که بعداً برایمان ملموس‌تر می‌شود) و برای خروج از مرکز هر نوعی از مقطع مخروطی داریم:

$$\boxed{e=\frac{\sin\theta}{\cos\alpha}}$$

ره‌یافت هندسی



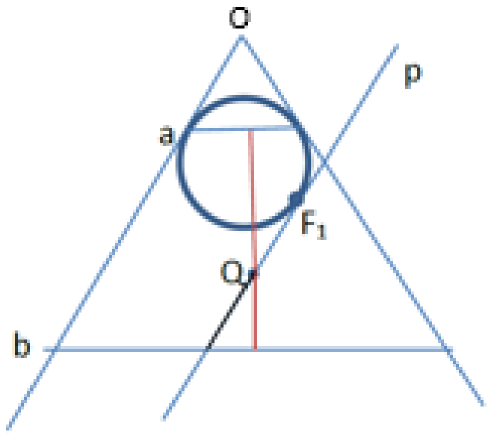
حال ره‌یافتی ساده‌تر را پیش می‌گیریم. مخروطی دو طرف را در نظر بگیرید.یعنی هم رو به بالا باز می‌شود و هم رو به پایین (فعلاً با قسمت پایینش کار داریم). فرض کنید صفحه‌ای را با زاویه θ نسبت به افق با مخروط قطع می‌دهیم. سپس دو کره را طوری بر قسمت داخلی مخروط مماس می‌کنیم که کره‌ها بر صفحه‌ی متمایل هم مماس باشند. نقطه‌های مماس شدن بر صفحه p را F_1 و F_2 می‌نامیم. حال می‌دانیم که مقطع مشترک یا به عبارتی مقطع تقاطع مخروط و p یک سری نقطه می‌شوند که روی p هستند.حال فرضاً نقطه‌ای به نام Q را از نقاط نام‌برده انتخاب می‌کنیم.منحنی‌هایی که در شکل، روی کره‌ها کشیده شده است(a و b) نقاط تماس کره‌ها با مخروطند. خواهشاً توجه کنید که شکل از کنار است و Q نقطه‌ای است که هم روی مخروط است و هم روی p. ولی F_1 و F_2 تنها روی p هستند. حال اگر بخواهیم از Q به دو کره مماس کنیم قطعاً پاره‌خط قرمز رنگ می‌شود.از این به بعد پاره‌خطی که از Q به کره‌ی بالایی مماس می‌شود را "تکه بالایی قرمز" و پاره‌خطی که از Q به کره پایینی مماس می‌شود را "تکه پایینی قرمز" می‌نامیم. می‌دانیم که اگر از یک نقطه خواستیم پاره‌خط‌هایی را بر کره‌ای مماس کنیم طول آن پاره‌خط‌ها با هم برابر است و در واقع مخروطی از پاره‌خط‌ها کره را احاطه می‌کند. حال هم تکه بالایی قرمز بر کره‌ی بالایی مماس است و هم $Q F_1$. از طرفی دیگر، هم تکه پایینی قرمز بر کره پایینی مماس است و هم $Q F_2$. پس: تکه بالایی قرمز = $Q F_1$ و تکه پایینی قرمز=$Q F_2$. حال داریم: تکه بالایی قرمز+ تکه پایینی قرمز=$Q F_1$+ $Q F_2$. اما طرف راست این تساوی یعنی طول کل پاره‌خط قرمز. اگر نقاط مختلف روی مقطع مشترک را در نظر بگیریم بدیهی است که به خاطر تقارن مخروط برای همه‌ی آن‌ها طول کل پاره‌خط قرمز یکسان است.پس با مقایسه نقاط مختلف می‌رسیم به:

$$QF_1+QF_2=\text{ثابت}$$

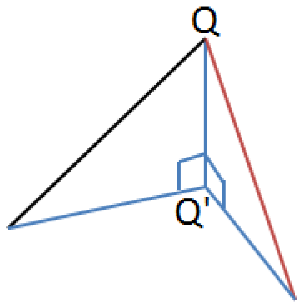
که این ویژگی بیضی است:

مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فاصله‌شان از دو نقطه ثابت باشد، بیضی است.

یعنی ثابت شد شکل حاصل یک بیضی خواهد بود به شرطی که F_1 و F_2 دو کانون بیضی باشند.



راه مشابهی برای سهمی وجود دارد. در اینجا هم مثل قبل دایره‌ی a (که در اینجا از کنار به صورت یک خط دیده می‌شود) محل تماس کره با مخروط است. در حالت بیضی صفحه‌ی p جهت‌گیری دل خواهی داشت به طوری که هنوز صفحه‌ی p با لااقل یکی از یال های مخروط موازی نشده بود. حال وارد بررسی حالت بعدی می شویم؛ صفحه‌ی p را موازی با یک یال مخروط می‌گیریم و نقطه F_1 محل تماس p با کره است. در اینجا دیگر F_2 نداریم. پاره‌خط قرمز تماماً روی سطح مخروط است و در امتداد یکی از یال‌های آن است. خط افقی پایینی شکل، دایره‌ی b است که آن را به خاطر دید از کنار به صورت خط می‌بینیم. مجدداً نقطه‌ای دلخواه به نام Q را در مقطع مشترک می‌گیریم. پاره‌خط مشکی‌ای که در شکل می‌بینید و یک سر آن Q است در واقع پاره‌خطی است در p و موازی با یال سمت چپ(منظور چپ‌ترین یالی از مخروط است که در شکل به صورت نیم‌خط Ob دیده می‌شود) است. از این به بعد آن را به نام پاره‌خط مشکی می‌شناسیم. طبق مطالب گفته شده می‌دانیم: تکه بالایی قرمز= QF_1 . حال ادعا می‌کنیم که؛ تکه پایین قرمز=پاره‌خط مشکی. علت آن این است که اگر از Q به صفحه‌ی b عمودی رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه تشکیل خواهد شد که وتر یکی تکه پایین قرمز و وتر دیگری پاره‌خط مشکی است. به شکل توجه کنید:



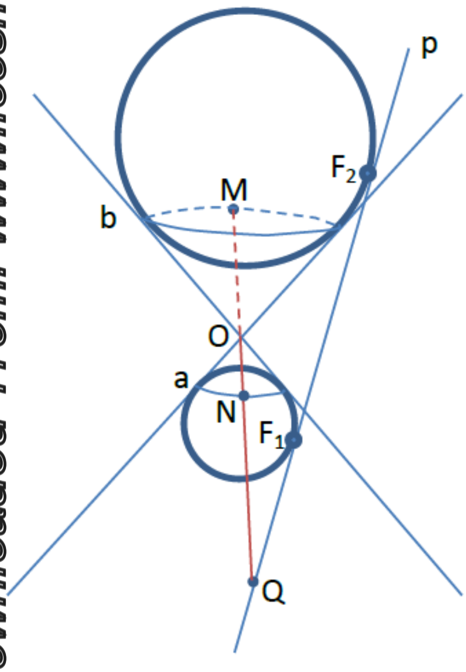
می‌بینیم که QQ' برای هر دو مثلث یکی است و از طرفی زاویه مقابل به QQ' هم برای هر دو مثلث یکی است. چرا زوایا یکی‌اند؟ چون که p موازی یال Ob است و لذا شیبش با Ob برابر است. از طرفی شیب همه یال‌های مخروط با هم برابرند، پس شیب p نسبت به افق با شیب پاره‌خط قرمز یکی است و چون پاره‌خط مشکی یک پاره‌خط در p و به موازات Ob بود لذا شیب پاره خط مشکی با شیب p برابر می‌شود پس شیب پاره‌خط قرمز و مشکی با هم برابر می‌شود.یعنی زاویه‌ی مقابل به QQ' برای هر دو مثلث برابر می‌شود.حال حاصلضرب وتر ضرب درسینوس زاویه مقابل QQ' برای هر دو مثلث یکی شده(چرا که QQ' ها یکی شده) و از طرفی به علت برابری زوایا، سینوس هایشان هم برابرند، پس دو وتر برابر می‌شوند و طول پاره‌خط مشکی با تکه پایین قرمز یکی می‌شود. حال مثل قبل از این استفاده می کنیم و می‌گوییم:

ثابت = طول کل پاره‌خط قرمز= پاره‌خط مشکی+QF_1

ولی اگر دقت کنید می‌بینید که پاره‌خط مشکی فاصله‌ی Q است از یک خط، که آن خط مشترک p و b است که بر صفحه کاغذ عمود است. بنابراین به تعریف سهمی مبنی بر این که:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌شان از یک نقطه و یک خط ثابت باشد، سهمی است.

رسیدیم. ممکن است بگویید تعریف سهمی چیز دیگری است از جمله مکان هندسی نقاطی که فاصله‌شان از یک نقطه و یک خط برابر باشد، ولی باید گفت که عبارت بالا هم تعریفی از سهمی است و این دو هم ارزند. فقط تعریف گفته شده در بالا همه‌ی سهمی، تا بی‌نهایت، را به ما نمی‌دهد و یک دامنه‌ی مشخصی از شکل آن را می‌دهد(چرا؟). ولی تعریف برابری فاصله از نقطه و خط تا دامنه‌ی بی‌نهایت را می‌دهد.



حال برویم سراغ هذلولی. برای هذلولی به علت این‌که p دو مخروط را با هم قطع می‌کند لذا باید دو مخروط بالا و پایین را با هم بکشیم.در این حالت b می‌آید بالای a. باز نقطه‌ی Q را از مقطع مشترک p و مخروط در نظر می‌گیریم. در این شکل OM در پشت تصویر روی سطح مخروط و امتداد NO است. می‌دانیم: $QF_2=QM$ و $QF_1=QN$ (به ابعاد شکل نگاه نکنید.غلط انداز است. شما حقیقت را دریابید!) از شکل و تقارن معلوم است که MN برای نقاط مختلف مقطع مشترک ثابت است لذا می رسیم به:

$$QF_2-QF_1=MN=\text{ثابت}$$

معادله‌ی بالا شاخه‌ای از هذلولی را به ما می‌دهد. برای آن که شاخه‌ی بالایی را بیابیم روش همین است ولی این دفعه Q به F_2 نزدیک‌تر از F_1 است لذا داریم:

$$QF_1-QF_2=MN=\text{ثابت}$$

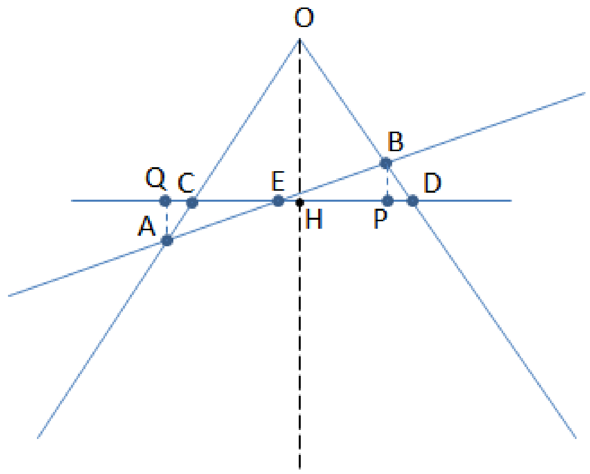
لذا به تعریف نهایی هذلولی می‌رسیم:

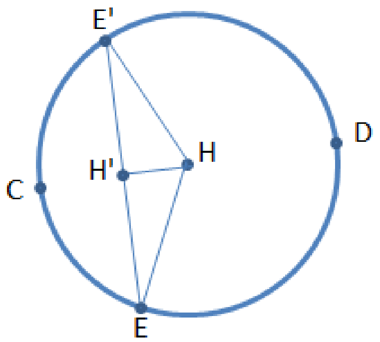
مکان هندسی نقاطی در صفحه که اندازه اختلاف فاصله‌شان از دو نقطه ثابت است، یک هذلولی است.

خروج از مرکز مقاطع مخروطی در ره‌یافت هندسی

حال که روش ساده‌تر هندسی را گفتیم باید قادر باشیم مثل روش تحلیلی، خروج از مرکز مقاطع مخروطی را از دید هندسی هم بیابیم. برای حالت بیضی به شکل توجه کنید. در شکل، AB در همان صفحه‌ای قرار دارد که در آن بیضی

تشکیل می‌شود. OH محور مخروط است و CD در صفحه‌ی عمود بر OH است که می‌دانیم طبق تقارن این صفحه یک شکل دایره‌ای دارد که دایره هم در شکل می‌بینید.





دایره‌ی CD و بیضی AB با هم در پاره‌خط 'EE تقاطع دارند. هم چنین دایره‌ی CD، بیضی AB را طوری قطع می‌کند که مرکز بیضی در صفحه‌ی دایره قرار گیرد. یعنی 'H مرکز بیضی است و H هم مرکز دایره است. بنابراین H'E و H'E' برابر با b (نیم‌قطر کوچک) بیضی هستند (چرا؟ چون که پاره‌خط AB بزرگترین پاره‌خط در بیضی است و بنابراین بزرگ‌ترین قطر بیضی است، حال از دیدی که از کنار در شکل داریم مشخص می‌شود که 'EE بر AB عمود است و می‌دانیم که قطر عمود بر بزرگ‌ترین قطر بیضی، کوچک‌ترین قطر بیضی است) و H'B=H'A=a که در آن a نیم‌قطر بزرگ بیضی است. دقت کنید که در شکل مخروط هر سه نقطه‌ی E و 'E و 'H در راستای یک خطاند و با هم دیده نمی‌شوند و به جای آن‌ها فقط E دیده می‌شود. دو نقطه P و Q تصویر دو نقطه B و A هستند روی صفحه افقی کشیده شده در شکل(CD). حال چون که EB=EA پس BP=QA و EP=EQ و از طرفی $P\hat{B}D = C\hat{A}Q$ در نتیجه طبق برابری دو مثلث کوچک داریم: PD=CQ. چون CP مشترک است لذا QP=CD. زاویه‌ی $P\hat{E}B$ را θ و زاویه $C\hat{O}H$ را α می‌نامیم. پس:

$PQ = 2a\cos\theta = CD = 2HD$ در نتیجه داریم: $HD = a\cos\theta$ و $HD = OH\tan\alpha$ و $PB = a\sin\theta$ پس $PD = a\sin\theta\tan\alpha$. از طرفی چون HP بین HD و PE مشترک است پس در شکل مخروط PD=EH یعنی: $EH = a\sin\theta\tan\alpha$. البته EH در شکل مخروط برابر 'HH در شکل دایره است.پس $HH' = a\sin\theta\tan\alpha$. از طرفی E'H برابر شعاع دایره یعنی $a\cos\theta$ است بنابراین:

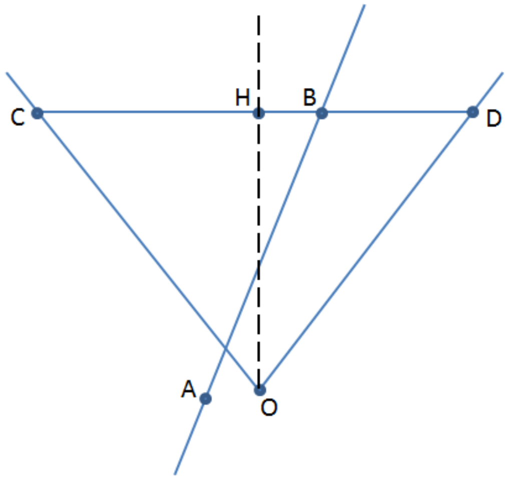
$$E'H'^2 = b^2 = a^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta\tan^2\alpha = a^2(1-e^2)$$

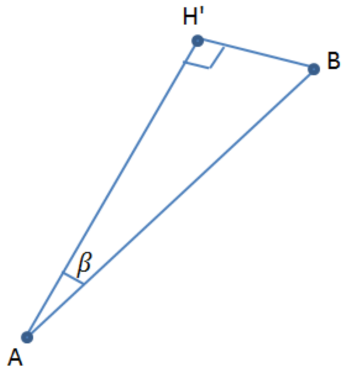
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta\tan^2\alpha = 1-e^2 \implies 1-\sin^2\theta-\sin^2\theta\tan^2\alpha =$$

$$1-\sin^2\theta\,(1+\tan^2\alpha)=1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\alpha}=1-e^2 \implies e=\frac{\sin\theta}{\cos\alpha}$$

سهمی هم چون همیشه خروج از مرکز مشخصی دارد، نیاز به بررسی ندارد.

حال برای خروج از مرکز هذلولی چه باید کرد؟ این دفعه راه هندسی خیلی شبیه به حالت بیضی نیست.





برای شاخه‌ی هذلولی تشکیل شده که در صفحه‌ی AB است، A را مرکز هذلولی گرفته‌ایم. مرکز هذلولی جایی است دقیقاً بین دو کانون دو شاخه‌ی هذلولی. مثل قبل CD صفحه‌ی دایره است و پاره‌خط H'B در صفحه‌ی CD است. نقطه H' تصویر B بر پاره‌خط CD است.کار ما یافتن حدی است برای زاویه‌ی β. نقطه‌ی B، نقطه‌ای است روی هذلولی و دایره‌ی CD. پس با بالا و پایین بردن CD یعنی کم و زیاد کردن OH، B می‌تواند نقاط مختلف هذلولی را تجربه کند و بنابراین β هم می‌تواند مقدارهای مختلفی به خود بگیرد. می‌توان نشان داد β یک حد دارد. برای یافتن این حد از تقریب‌های معقولی استفاده می‌کنیم. زاویه‌ی صفحه‌ی هذلولی (AB) را با صفحه‌ی افقی (CD) طبق معمول θ می‌نامیم.

در حد AH' ها و OH های بزرگ داریم: $AH'=\frac{OH}{\sin\theta}$. و در این حد داریم: $HH'=AH'\cos\theta$. همانند قبل زاویه نیم‌رأس مخروط را α می‌نامیم. چون HB شعاع دایره‌ی CD است داریم: $HB=OH\tan\alpha$. حال در مثلث HH'B با رابطه فیثاغورس برای H'B داریم:

$$\begin{aligned} H'B^2=HB^2-HH'^2&=OH^2\tan^2\alpha-AH'^2\cos^2\theta\\ &=AH'^2\sin^2\theta\tan^2\alpha-AH'^2\cos^2\theta\\ &=AH'^2(\sin^2\theta\tan^2\alpha-\cos^2\theta) \implies \end{aligned}$$

$$\tan^2\beta=\frac{H'B^2}{AH'^2}=\sin^2\theta\tan^2\alpha-\cos^2\theta \implies$$

$$\frac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \sin^2\theta\tan^2\alpha + \sin^2\theta - 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\beta} \quad\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\beta} = \frac{\sin\theta}{\cos\alpha}$$

بنابراین β به مقدار مشخصی میل می‌کند. حال برای هذلولی می‌دانیم که نیم زاویه‌ی بین دو مجانب برابر است با:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$$

با مقایسه این رابطه با رابطه‌ی بالاتر داریم:

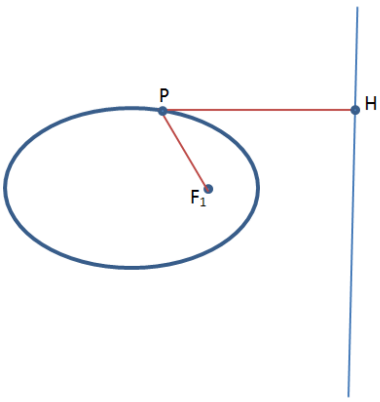
$$e = \frac{\sin\theta}{\cos\alpha}$$

تعریفی دیگر از مقاطع مخروطی

به صورتی دیگر هم می‌توان برای مقاطع مخروطی تعریف ارائه داد. به این گونه که یک نقطه و یک خط در فضا در نظر می‌گیریم، سپس می‌گوییم:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله‌ی آن‌ها با نقطه به فاصله‌ی آن‌ها با خط برابر e باشد، مقطع مخروطی با خروج از مرکز e را می‌سازد.

خوب است از چیزهایی که بلدیم استفاده کنیم و این موضوع را برای بیضی نشان دهیم.



در شکل می‌بینیم که F_1 کانون بیضی است و P نقطه‌ی دلخواهی روی محیط بیضی است و خط کشیده شده در سمت راست فرضاً خطیست عمود بر نیم قطر بزرگ بیضی. دقت کنید که لزومی ندارد شکل کشیده ابعاد و مقیاسش درست باشد و اندازه‌ها برای درست نشان دادن خروج از مرکز واقعی بیضی، درست باشند، و شکل صرفاً برای انتقال مفهوم است. حال قضیه‌ی بالا به ما می‌گوید که $PF_1=e.PH$. اگر فرض کنیم که P روی حضیض نسبت به F_1 باشد آن گاه داریم:

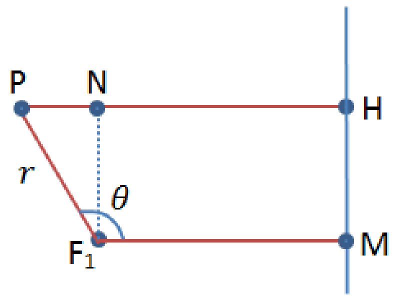
$$PF_1 = a(1-e) \Longrightarrow PH = PH(\theta = 0) = \frac{a(1-e)}{e}$$

حال برای هر نقطه دلخواه طبق آن چیزی که می‌دانیم داریم:

$$r = PF_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Longrightarrow PH = \frac{a(1-e^2)}{e(1+e\cos\theta)}$$

البته نتیجه‌ای که در بالا در سمت راست گرفتیم با فرض این است که قضیه درست است، چیزی که به زودی نشان داده می‌شود. در بالا θ زاویه PF_1 با راستای حضیض است.حال به شکل زیر توجه کنید:

می‌دانیم که :



$$NH = F_1M = PH(\theta = 0) + a(1-e)$$

حال داریم:

$$PH(\theta) = r\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + NH = -r\cos\theta + NH$$
$$= -r\cos\theta + PH(\theta = 0) + a(1-e)$$
$$= -r\cos\theta + a\frac{1-e}{e} + a(1-e)$$
$$= -\frac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}$$
$$+ \frac{a(1-e+e-e^2)}{e}$$
$$= \frac{a(1-e^2)}{e(1+e\cos\theta)}(1+e\cos\theta$$
$$-e\cos\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad PH(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{e(1+e\cos\theta)}$$

می‌بینیم که به نتیجه‌ای رسیدیم که در قبل با قبول قضیه‌ی بیان شده هم رسیده بودیم. لذا قضیه برای بیضی برقرار است. البته ممکن است ایراد بگیرید که قضیه را در نهایت اثبات نکردیم، چرا که آخر از $PH(\theta = 0)$ استفاده کردیم که آن را خودش از قضیه مقدارش را یافتیم. اشکالی ندارد! ما دست کم این را نشان دادیم که لااقل خطی در صفحه وجود دارد که اگر برای یک نقطه در بیضی این خاصیت باشد، برای نقاط دیگر هم برقرار است. در این‌جا صرفاً یک موضوعی را نشان دادیم ولی شما در مسئله ۳۳ آن را در حالت کلی اثبات می‌کنید.

برای سهمی هم می‌دانیم که اصلاً فرمول:

$$r = \frac{2p}{1+\cos\theta}$$

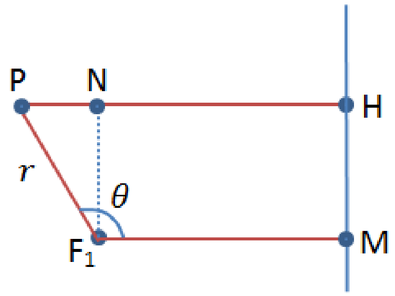
از این به دست می‌آید که سهمی مکان هندسی نقاطی است که فاصله‌شان از یک و نقطه و یک خط برابر باشد. و یعنی خود به خود e را برابر یک گذاشتیم. لذا از سهمی می‌گذریم و به سراغ هذلولی می‌رویم.

بیان قضیه در این جا می‌شود:

$PF_1=e.PH$ و $e>1$

در اثبات قضیه برای هذلولی داریم:

$$r = PF_1 = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}$$



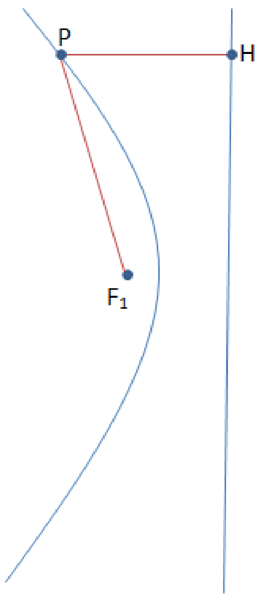
که همان‌طور که می‌دانید در اینجا دیگر نیم قطر بزرگ معنی ندارد و a طول مشخصه‌ای با تعریف نصف فاصله‌ی بین دو حضیضِ دو شاخه هذلولی است.

در این جا تعریف θ مثل بیضی است. و در هذلولی هم فاصله حضیض می‌شود:

$$PF_1(\theta=0) = a(e-1)$$

مجدداً شکلی که در بالا داشتیم را در این‌جا آورده‌ایم و باز داستان تکراری:

$$NH = F_1M = PH(\theta=0) + a(e-1)$$



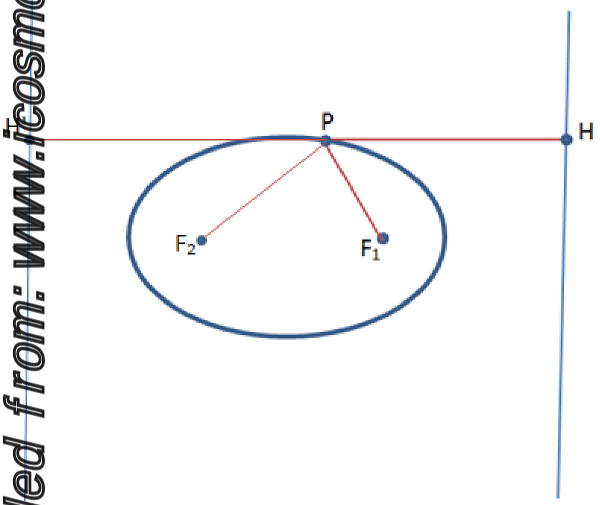
$$\begin{aligned}
PH(\theta) &= r\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + NH = -r\cos\theta + NH \\
&= -r\cos\theta + PH(\theta=0) + a(e-1) \\
&= -r\cos\theta + a\frac{e-1}{e} + a(e-1) \\
&= -\frac{a(e^2-1)\cos\theta}{1+e\cos\theta} + \frac{a(e-1+e^2-e)}{e} \\
&= \frac{a(e^2-1)}{e(1+e\cos\theta)}(1+e\cos\theta - e\cos\theta)
\end{aligned}$$

که باز:

$$PH(\theta) = \frac{a(e^2-1)}{e(1+e\cos\theta)} = \frac{PF_1}{e}$$

قضیه ثابت است.

هم‌ارزی تعریف‌های مختلف



حال می‌خواهیم ببینیم آیا با این تعریفی که بالا از مقاطع مخروطی ارائه دادیم می‌توان تعریف اولیه را در آورد. برای بیضی امتحان می‌کنیم:

تعریف اول:

مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فاصله‌شان از دو نقطه ثابت باشد، بیضی است.

تعریف جدید:

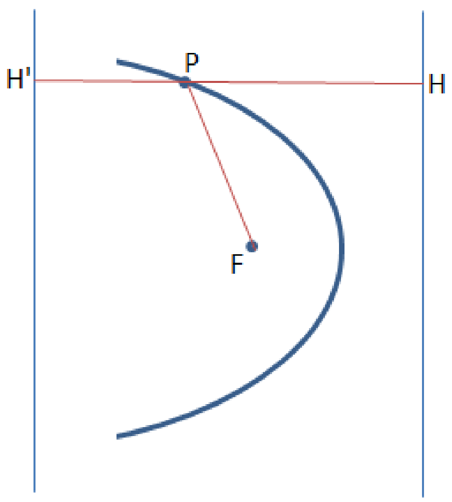
مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله‌ی آن‌ها با نقطه به فاصله‌ی آن‌ها با خط برابر e باشد، مقطع مخروطی با خروج از مرکز e را می‌سازد. (e<1)

خوب است که طبق تقارن بیضی مثل خطی که در سمت راست بیضی گرفتیم، در سمت چپ آن هم بگیریم و آن یکی کانون بیضی هم مشخص کنیم.

می‌دانیم که:

$$PH = \frac{PF_1}{e} \quad \text{و} \quad PH' = \frac{PF_2}{e} \quad \Longrightarrow$$

$$PH + PH' = \frac{PF_1 + PF_2}{e}$$



و چون برای نقاط مختلف روی بیضی هم خروج از مرکز ثابت است و هم فاصله‌ی دو خط $(PH + PH')$ ثابت است لذا:

$$PF_1 + PF_2 = \text{ثابت}$$

و از تعریف دوم به تعریف اول رسیدیم.

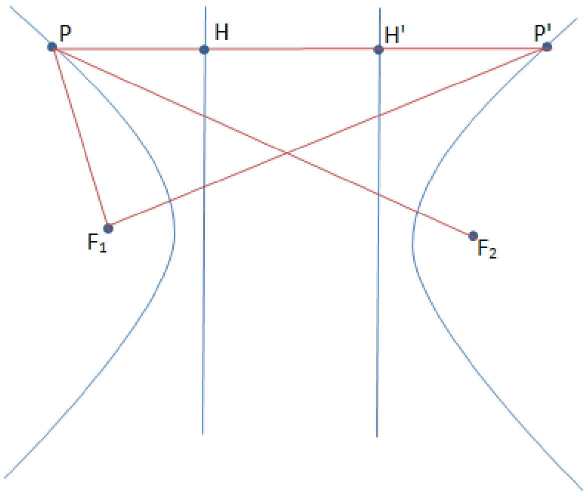
برای سهمی چه کنیم؟ به شکل توجه کنید.

تعریف اول:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌شان از یک نقطه و یک خط ثابت باشد، سهمی است.

تعریف دوم:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله‌ی آن‌ها با نقطه به فاصله‌ی آن‌ها با خط برابر یک باشد، مقطع مخروطی با خروج از مرکز یک (سهمی) را می‌سازد.



طبق تعریف دوم داریم: PF=PH. از جهتی که PH+PH' برای هر Pای ثابت است چون که فاصله‌ی بین دو خط ثابت است لذا: ثابت=PF+PH' و به تعریف اول رسیدیم.

برای هذلولی هم کار مشابهی باید انجام داد.

تعریف اول:

مکان هندسی نقاطی در صفحه که اندازه اختلاف فاصله‌شان از دو نقطه ثابت است، یک هذلولی است.

تعریف دوم:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله‌ی آن‌ها با نقطه به فاصله‌ی آن‌ها با خط برابر e باشد، مقطع مخروطی با خروج از مرکز e را می‌سازد.($e>1$)

باز هم مکان هندسی نقاطی که وضعیت آن‌ها نسبت به یک خط و یک نقطه طبق تعریف دو داده شود هر دو شاخه‌ی هذلولی را می‌سازد. توجه کنید که هر دوشاخه هذلولی را تنها با یک خط یک کانونش می‌توان ساخت و نیاز به داشتن همزمان دو کانون نیست (اگر دقت کرده باشید برای ساختن بیضی هم از یک کانون استفاده کردیم). داریم:

$$PF_1 = e.PH \qquad \text{و} \qquad P'F_1 = e.P'H$$

از طرفی طبق تقارن F_2 نسبت به F_1 داریم:

$$PF_2=P'F_1$$

پس داریم:

$$PF_1 = e.PH \qquad \text{و} \qquad PF_2 = e.P'H$$

$$P'H - PH = H'H = \text{ثابت} \implies \frac{1}{e}(PF_2 - PF_1) = \text{ثابت} \implies PF_2 - PF_1 = \text{ثابت}$$

به ویژگی هذلولی رسیدیم ودر این‌جا هم ویژگی اول و دوم هم ارز شدند.

وحدت مقاطع مخروطی

همان طور که دیدیم و باز هم در آینده در قسمت مکانیک می‌بینیم، معادلات مقاطع مخروطی بسیار به هم شبیه‌اند تا جایی که ما را به این فکر فرو می‌برد که نکند منشأ همه‌ی این‌ها یکی باشد!؟ و عملاً این‌ها به یک شکل رفتار کنند!؟ در ادامه به اثباتی اجمالی و تقریبی می‌پردازیم. در قسمت اعداد مختلط نگاهی دیگر به وحدت داریم.

آیا سهمی یک بیضی است!؟

شاید باورتان شود شاید نه (!) ولی جمله‌ی بالا کاملاً درست است! و سهمی دقیقاً یک بیضی است. چگونه؟ اثبات می‌کنیم:

برای اثبات یک بیضی را در نظر می‌گیریم با مشخصات معلوم و مبدأ مختصات را در کانون سمت راست بیضی قرار می‌دهیم. در چنین حالتی معادله‌ی بیضی می‌شود:

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + e^2 + \frac{2xe}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2xe}{a} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 - e^2 \implies \frac{x^2}{a} + 2xe + \frac{y^2}{a(1-e^2)} = a(1-e^2)$$

حال اگر e را به یک و a را به بی‌نهایت میل دهیم به طوری که $a(1-e)$ به عدد ثابتی مثل p میل کند داریم:

$$0 + 2x * (1) + \frac{y^2}{p*(1+1)} = p*(1+1) \implies x = p - \frac{y^2}{4p}$$

معادله‌ی بالا دقیقاً معادله‌ی یک سهمی است به فاصله حضیض p به طوری که کانونش روی مبدأ مختصات قرار گرفته باشد و سر باز سهمی رو به چپ است (دقیقاً چیزی که انتظارش را داشتیم) پس نتیجه می‌گیریم:

سهمی یک بیضی است که نیم قطر بزرگ آن را به بی‌نهایت و خروج از مرکز آن را به یک میل دادیم به طوری که فاصله حضیض آن به عدد ثابتی میل کند.

دقت کنید که اگر نیم‌قطر بزرگ ثابت باشد و خروج از مرکز را به یک میل دهیم، شکل حاصل یک پاره‌خط خواهد شد ولی اگر در عین زیاد کردن خروج از مرکز، روی کانون و فاصله حضیض آن زوم کنیم شاید قادر باشیم که اگر تا بی‌نهایت زوم کنیم، شکل حاصل را سهمی ببینیم.

این که سهمی یک بیضی است را خیلی ساده‌تر با استفاده از همان تعاریف بیضی و سهمی می‌شد اثبات کرد. در تعریف سهمی داریم:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌شان از یک نقطه و یک خط ثابت باشد، سهمی است.

و در تعریف بیضی داریم:

مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فاصله‌شان از دو نقطه ثابت باشد، بیضی است.

حال اگر یکی از نقاط کانون به بی نهایت رود چه؟ از دید این یکی کانون، فاصله هر نقطه روی بیضی از کانونی که به بی‌نهایت رفته، می‌شود طول خطی که هم با راستای افق (راستای وصل کننده دو کانون به یک‌دیگر) موازی است و هم تا بی‌نهایت رفته است! حال طول خط بی‌نهایت چه‌قدر است!؟ چون نمی‌توانیم به این سؤال پاسخ دهیم، خطی را عمود بر محور وصل کننده دو کانون در نظر می‌گیریم که لااقل شرط موازی بودن خط واصل هر نقطه تا کانون بی‌نهایت را برطرف کند، بعد می‌گوییم که چون فاصله‌ی نقطه نقطه‌ی این خط با بی‌نهایت، برای تمام نقاط خط یکی است پس کافی است ما مکان هندسی نقاطی را بیابیم که مجموع فواصلشان از کانون اول و خط فرضی دوم(که به جای کانون بی‌نهایت از آن استفاده می‌کنیم) به یک اندازه باشد و این یعنی همان تعریف سهمی.

راه شهودی دیگر برای این موضوع این است که می‌دانیم در همان مسئله‌ی مخروط و صفحه اگر زاویه‌ی صفحه با افق را مرتباً زیاد کنیم خروج از مرکز بیضی‌هایی که تشکیل می‌شود دائماً زیاد می‌شود تا این که برسیم به جایی که صفحه با یکی از یال‌ها موازی شود و می‌گوییم در این‌جا سهمی داریم. عقل سلیم با خود می‌گوید که ما به اندازه‌ی کمی کوچک‌تر از این زاویه بحرانی، بیضی داشتیم، حال چه می‌شود که سر همین یک مقدار زاویه کوچک کلاً معادله شکل عوض می‌شود و چیز خیلی جدیدی به دست می‌آید که هیچ ربطی به قبلی‌ها ندارد!؟ آیا این حرف درست است؟ممکن است بگویید اهمیت این‌که سهمی بیضی شد، چیست؟ می‌توانید برای مشاهده‌ی مثالی به مسئله ۷ نگاه کنید.

آیا سهمی یک هذلولی است!؟

باز هم باید گفت آری! عقل سلیمی که در بالا باعث نشد با کمی منحرف کردن صفحه، بیضی، سهمی نشود، این‌جا هم اجازه نمی‌دهد با کمی منحرف کردن صفحه، سهمی، هذلولی نشود! اگر زاویه بین مجانب‌های هذلولی را به صفر میل دهیم انتظار داریم چه ببینیم؟ احتمالاً پاسخ خواهید داد، دو نیم‌خط. خوب اگر مثل قبل در عین کم کردن خروج از مرکز روی یکی از کانون‌ها زوم کنیم، چه؟ باز کمی معادله‌بازی(!) کنیم:

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

در معادله‌ی بالا مبدأ را روی کانون سمت راست هذلولی گذاشته‌ایم. در همین جا بگویید ببینیم(!) که اگر هذلولی سهمی شد، انتظار داریم سرِ باز سهمی به چه سمتی باشد؟ مسلم است که خواهید گفت سمت راست، چرا که اینجا ما با شاخه‌ی سمت راست هذلولی کار داریم. ادامه می‌دهیم:

$$\frac{x^2}{a^2}+e^2+\frac{2xe}{a}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2xe}{a}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1-e^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{a}+2xe-\frac{y^2}{a(e^2-1)}=a(1-e^2)$$

باز مثل قبل اگر e را به یک و a را به بی‌نهایت میل دهیم به طوری که $a(e-1)$ به عدد ثابتی مثل p میل کند داریم:

$$0+2x*(1)-\frac{y^2}{p*(1+1)}=-p*(1+1) \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{y^2}{4p}-p$$

که این شد معادله‌ی سهمی‌ای با محور X به عنوان محور تقارن و سرِ باز سهمی رو به راست.

ممکن است ایراد بگیرید که اگر سهمی یک هذلولیِ حدی است پس مجانب‌هایش کو؟ جواب خواهیم داد که مجانب‌هایش رفته‌اند به بی‌نهایت (با این وصف آیا مجانبی که در بی‌نهایت باشند و نتوان آن را دید به دردی می‌خورند!؟ این است که می‌گوییم سهمی مجانب ندارد) می‌توان نشان داد که اختلاف بین مجانب و منحنی برای شکل هذلولی در x ثابت، با میل به صفر دادن زاویه بین دو مجانب، به بی‌نهایت میل می‌کند. این یعنی چی؟ یعنی این که اگر انتظار داشته باشیم سهمی همان هذلولی باشد، این بی‌نهایت شدن اختلاف مجانب و منحنی در حد زاویه بین دو مجانب صفر، ما را متقاعد می‌کند که سهمی هم مجانب دارد. می‌گوییم که اگر سهمی، یک هذلولی باشد و اختلاف بین y مجانب و y منحنی در حدی که هذلولی سهمی می‌شود، به بی‌نهایت میل کرده و از طرفی، چون ما داریم سهمی را می‌بینیم، پس می‌گوییم مجانب آن به بی‌نهایت رفته. حال کمی محاسبات هم انجام می دهیم:

در x ثابت y مجانب را با y_m نشان می‌دهیم و y منحنی را با همان y. هم چنین زاویه‌ی بین مجانب و محور X را β می‌نامیم. هم چنین باز هم فرض می‌کنیم مبدأ مختصات روی کانون سمت راست هذلولی است.

$$y_m = (x + ae)\tan\beta$$

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = b\sqrt{\frac{(x+ae)^2}{a^2} - 1}$$

$$y_m - y = (x+ae)\tan\beta - b\sqrt{\frac{(x+ae)^2}{a^2} - 1}$$

$$\tan\beta = \tan(\cos^{-1}(\frac{1}{e})) = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}(\frac{1}{e}))}}{\cos(\cos^{-1}(\frac{1}{e}))} = \sqrt{e^2-1}$$

در حد a های رو به بی نهایت x در مقابل ae قابل صرفنظر است لذا داریم:

$$\lim_{a\to\infty}(b\sqrt{\frac{(x+ae)^2}{a^2} - 1}) = \lim_{a\to\infty}\left(a\sqrt{e^2-1}\sqrt{\frac{a^2e^2}{a^2} - 1}\right) = \lim_{a\to\infty}\big(a(e^2-1)\big)$$

از طرفی چون همزمان با a که به بی‌نهایت می‌رود e هم به یک میل می کند به طوری که داشته باشیم:

$$a(e-1) = p$$

پس:

$$\lim_{a\to\infty}\big(a(e^2-1)\big) = 2p$$

حال می‌ماند حد $(x+ae)\tan\beta$ را بیابیم. بدیهی است که جواب حد بی نهایت است چرا که:

$$\begin{aligned}(x+ae)\tan\beta &= x\sqrt{e^2-1} + e\sqrt{a}\sqrt{a(e-1)}\sqrt{e+1} \\ &= x\sqrt{e^2-1} + e\sqrt{a}\,p\sqrt{e+1}\end{aligned}$$

بدیهی است که چون a به بی‌نهایت رود عبارت بالا هم بی‌نهایت می‌شود. پس فهمیدیم که در عبارت $y_m - y$ جمله‌ی اول به بی نهایت می‌رود و جمله‌ی دوم به عدد ثابتِ $2p$. بنابراین $y_m - y$ هم میل به بی‌نهایت می‌کند.

حال خوب است از جنبه‌ای دیگر شباهت‌های بین سهمی و هذلولی و بیضی را ببینیم. از معادلات مشتق می‌گیریم:

بیضی: $\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}=-(1-e^2)\frac{(x+ae)}{y}$

سهمی: $x=p-\frac{y^2}{4p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2p}{y}$

حال اگر در فرم مشتق گرفته شده‌ی مربوط به بیضی a را به بی‌نهایت و e را به یک میل دهیم طوری که $a(1-e)$ همواره برابر p باشد داریم:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{بیضی}}=-\frac{(0+2p)}{y}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{سهمی}}$$

به طور مشابه می‌توان برای هذلولی این کار را انجام داد:

هذلولی: $\frac{(x+ae)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}=(e^2-1)\frac{(x+ae)}{y}$

سهمی: $x=\frac{y^2}{4p}-p \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}$

مجدداً داریم $a(e-1)=p$ پس:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{هذلولی}}=\frac{(0+2p)}{y}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{سهمی}}$$

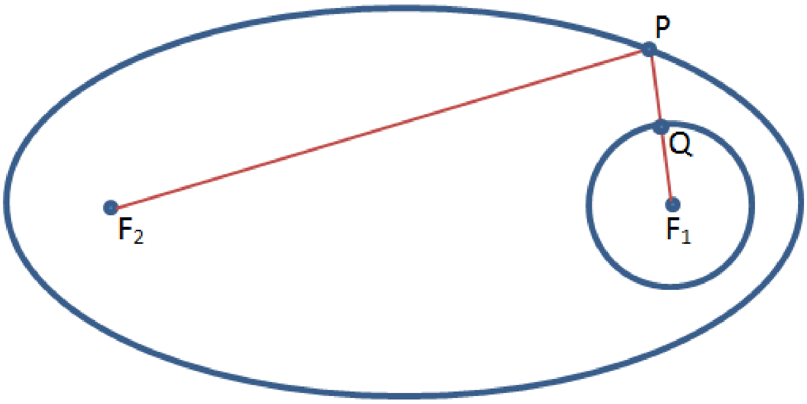
حال که به چنین روابطی بین سهمی و دو مقطع مخروطی دیگر رسیدیم سؤال پیش می‌آید که:

آیا هذلولی یک بیضی است!؟

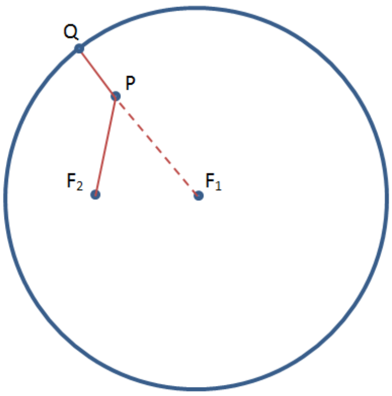
در این‌جا باید گفت شاید نتوان به روابط تمیزی مثل قبل رسید ولی باز هم می‌توان گفت تاحدودی آری! البته به شرطی که یک مقدار در تعریفمان از بیضی دست‌کاری کنیم! چطور است که از بیضی چنین تعریفی ارائه دهیم!؟:

به مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از یک نقطه و یک دایره ثابت باشد، بیضی گوییم.

آیا تعریف بالا با تعریفی که قبلاً از بیضی داشتیم و با دو نقطه کار می‌کردیم، فرقی دارد؟ در نگاه اول، نه. چرا؟ به شکل زیر توجه کنید:



حال بگویید با توجه به این که شعاع دایره ثابت است آیا ثابت بودن PF_2+PF_1 آیا هم ارز نیست با ثابت بودن PF_2+PQ؟ حال اگر شعاع دایره به حدی بزرگ باشد که آن کانون دیگر هم در دایره قرار گیرد چه؟



همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید این دفعه شعاع ثابت برابر $QP+PF_1$ است و از طرفی به خاطر تعریف بیضی باید PF_2+PQ ثابت باشد و اگر شعاع کره را R بنامیم به عبارتی دیگر باید $PF_2+(R-PF_1)$ ثابت باشد و از جهتی که شعاع ثابت است پس باید PF_2-PF_1 ثابت باشد و این یعنی یک هذلولی. ممکن است بگوییم این یکی خیلی دل‌چسب نبود! بله، درست است، چرا که به نظر می‌رسد $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ تفاوت فاحشی با $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ داشته باشد. مطلبی که در بالا گفته شد صرفاً برای به دست آوردن شهودی در شباهت هذلولی و بیضی بود. البته اصراری بر چپاندنِ تمام تعاریف در هم نداریم!

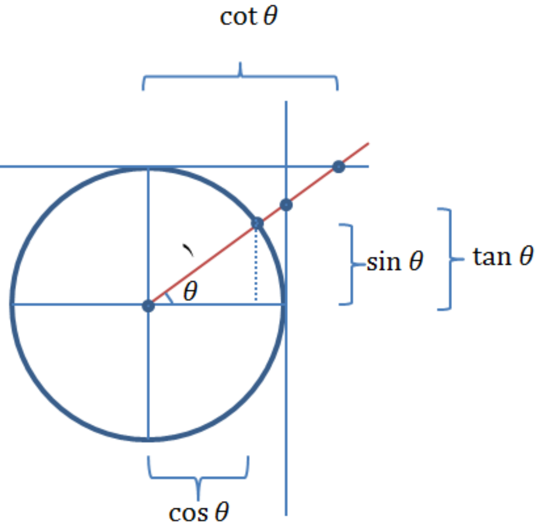
هم چنین یک شباهت دیگر بیضی و هذلولی این است که اگر ما مقطع مخروطیمان را فقط با a و e آدرس دهیم، آن گاه اگر معادله بیضی را بنویسیم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

به طور خود به خودی اگر خروج از مرکز از یک بزرگ‌تر شود:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

که در رابطه بالا، مخرج y مربوط به b در هذلولی می‌شود.



هندسه هذلولَوی

شکل مقابل را در هندسه‌ی دایروی داریم:

در هندسه‌ی هذلولوی هم، یعنی وقتی به جای دایره یک هذلولی داشته باشیم به روابط جالبی می‌رسیم.

قبل از آن باید گفت که هم چنین برای دایره‌ی مقابل به شعاع واحد، مساحت قطاع مربوط به زاویه θ می‌شود $\frac{1}{2}\theta$ (چرا؟). خواهیم دید که این خاصیت هم به نحوی بین دایره و هذلولی مشترک است.

لازم است قبل از ورود به کار هندسی، ابتدا توابع هذلولوی را بیان کنیم:

$$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad \text{(بخوانید سینوس هایپربولیک)}$$

$$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{(بخوانید کسینوس هایپربولیک)}$$

پس با حفظ تعریف قدیمی:

$$\tanh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \quad \text{(تانژانت هایپربولیک)}$$

و الی آخر مشابه توابع مثلثاتی می‌توان توابع هذلولوی را هم به دست آورد. با کمی محاسبات می‌توان اتحادهایی بین این توابع به دست آورد از جمله:

$$\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{sech}^2\alpha = 1 - \tanh^2\alpha$$

می‌بینید که این روابط با حالت مثلثاتی فرق می‌کنند. و اما چرا اسمشان توابع هذلولوی است؟ به اتحاد اول از دو اتحاد بالا نگاه کنید. اگر تغییر متغیر دهیم و $\frac{x}{a}$ را $\cosh\alpha$ و $\frac{y}{b}$ را $\sinh\alpha$ بنامیم، چه خواهد شد:

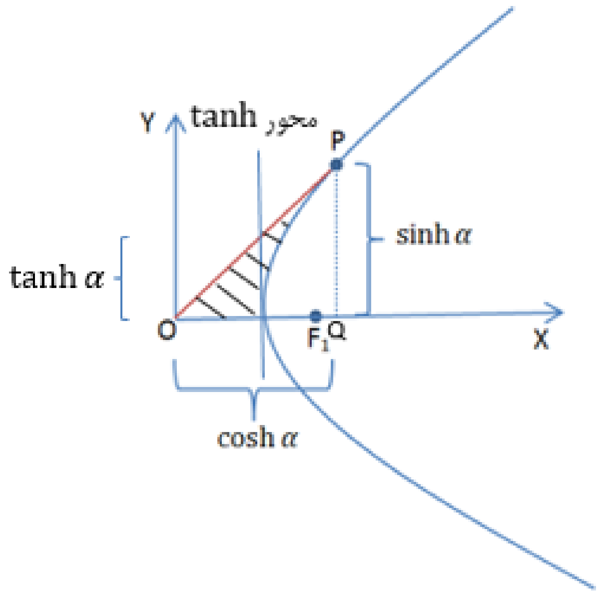
$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

که معادله‌ی بالا قطعاً معادله‌ی یک هذلولی است. همین طور که شاید قبلاً ناآگاهانه از توابع مثلثاتی دایروی استفاده می‌کردیم و شاید به این نکته توجه نمی‌کردیم که این توابع به خاطر خاصیتشان با یک بیضی (که در حالت خاص دایره می‌شود) منطبق می‌شوند. یعنی:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

که معادله‌ی بالا معادله‌ی یک بیضی است.

فعلاً می‌خواهیم حالت خاصی را در هذلولی مد نظرمان، در نظر بگیریم. به این صورت که $a = b = 1$. اگر شکل هذلولی را بکشیم به شباهت آن با حالت دایروی پی می‌بریم:



حال سؤال پیش می‌آید که آیا α مثل حالت دایروی همان زاویه بین OP و محور X است یا خیر؟ در جواب باید گفت خیر! اگر این زاویه نیست، پس چیست؟ به α به یک نحوی از جنس مساحت است!! اگر از این حرف تعجب می‌کنید باید گفت که قبلاً شما قبول کرده بودید که مساحت قطاع دایره می‌شود $\frac{1}{2}\theta$ و یعنی در مساحت از θ استفاده کرده‌اید. بحث سر بعد θ یا α نیست که بگوییم آیا رادیان برابر یک متر مربع است یا خیر! بلکه بحث سر اندازه است. یعنی اگر در دایره‌ای به شعاع واحد، دوبرابر مساحت قطاعی را حساب کردیم، این می‌شود زاویه‌ی مربوط به آن قطاع بر حسب رادیان. منتها در حالت دایره به راحتی می‌گفتیم این عددی که به عنوان زاویه به دست آوردیم از لحاظ هندسی دقیقاً برابر با زاویه بین PO محور X است. ولی در حالت هذلولوی قضیه به این راحتی نیست و شاید به راحتی دایره نتوان معادل هندسی پیدا کرد. از این چیزها که بگذریم ابتدا باید حرف خود را مبنی بر این که α در حالت هذلولوی هم مثل θ می‌تواند از جنس مساحت باشد را ثابت کنیم. برای این مطلب ما با همان فرض‌هایی که $(a = b = 1)$ $\cosh \alpha$ را x و $\sinh \alpha$ را y بنامیم پیش می‌رویم. قصد داریم مساحت ناحیه هاشور خورده‌ی شکل را بیابیم. برای این موضوع ابتدا مساحت مثبت زیر منحنی تا نقطه‌ی P را می‌یابیم، سپس این مساحت را از مساحت مثلث OPQ کم می‌کنیم تا مساحت هاشور را بدهد. اما:

$$\text{مساحت زیر منحنی} = \int_1^{x_P} y\,dx = \int_1^{x_P} \sqrt{x^2-1}\,dx$$

ولی انتگرال بالا را چگونه بگیریم؟ یکی از کاربردهای توابع هذلولوی در ساده کردن بعضی انتگرال‌هاست. همان گونه که در مسئله ۱۳ نشان خواهید داد، جواب انتگرال بالا می‌شود:

$$\int_1^{x_P} \sqrt{x^2-1}\,dx = \left[\frac{\sinh(2\alpha)}{4} - \frac{\alpha}{2}\right]_0^{\alpha_P} = \frac{\sinh(2\alpha_P)}{4} - \frac{\alpha_P}{2}$$

که از فرض $x = \cosh\alpha$ استفاده کردیم.

به سادگی می‌توانید اثبات کنید (مسئله ۹):

$$\sinh(2u) = 2\sinh u\cosh u$$

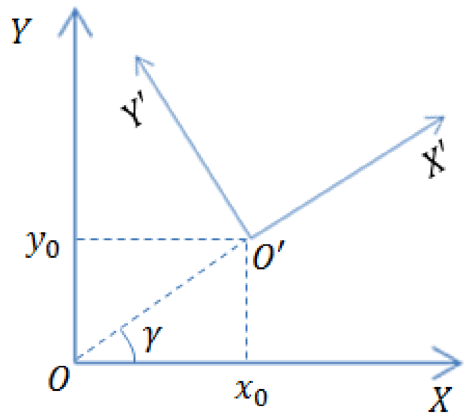
پس:

$$\begin{aligned}\text{مساحت هاشور} &= OPQ\ \text{مساحت مثلث} - \frac{\sinh\alpha_P\cosh\alpha_P}{2} + \frac{\alpha_P}{2}\\ &= \frac{\sinh\alpha_P\cosh\alpha_P}{2} - \frac{\sinh\alpha_P\cosh\alpha_P}{2} + \frac{\alpha_P}{2} = \frac{\alpha_P}{2}\end{aligned}$$

می‌بینیم که مثل حالت دایره، برای هذلولی هم اگر α ای وجود داشته باشد به طوری که $x = \cosh\alpha$ و $y = \sinh\alpha$، مساحت *قطاع هذلولوی* می‌شود مثل حالت دایره یعنی $\frac{\alpha}{2}$. ممکن است بگویید حال این شباهت هذلولی و بیضی به چه درد می‌خورد؟ ولی باید دانست که در مکانیک سماوی آن جا که می‌خواهیم معادله‌ی زاویه بر حسب زمان را در هذلولی بنویسیم، این شباهت در فهم شهود مسئله کمکمان می‌کند.

معادله کلی مقاطع مخروطی در دو بعد

حال سعی داریم که شناختی جامع تر روی مقاطع مخروطی در صفحه و بدون محدودیت داشته باشیم. به این معنی که معادله‌ی مقاطع مخروطی را در حالتی بیابیم که لزوماً مرکز مقاطع مخروطی مبدأ مختصات نباشد و یا ممکن است شکلمان چرخیده شده باشد. برای این کار از دستگاه مختصات چرخیده استفاده می‌کنیم. اگر نقاطی را در فضا به ما بدهند و بگویند که مثلاً مشخصات این مقطع مخروطی را بیان کنیم، کاری که می‌کنیم این است که نقطه‌ای دلخواه در صفحه $(x_0\ ,\ y_0)$ را به عنوان مرکز مقطع مخروطی مشخص می‌کنیم. هم چنین فرض می‌کنیم محور اصلی مقطع مخروطی به اندازه γ چرخیده است. با این فرض‌ها مشخصات مقطع مخروطی را می‌یابیم و بعد، خود $(x_0\ ,\ y_0)$ و γ را مشخص می‌کنیم و بدین ترتیب مسئله‌ی ما حل می‌شود. یعنی چارچوب ما این گونه است:



در ابتدا حالت بیضی را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma\\ \sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0+x'\cos\gamma-y'\sin\gamma\\ y_0+x'\sin\gamma+y'\cos\gamma\end{bmatrix}$$

در بالا دو معادله داریم. به صورت حل دو معادله دو مجهول x' و y' را بر حسب x و y می‌یابیم:

$$\begin{cases}x=x_0+x'\cos\gamma-y'\sin\gamma\\ y=y_0+x'\sin\gamma+y'\cos\gamma\end{cases}\Longrightarrow$$

$$x\sin\gamma-y\cos\gamma=x_0\sin\gamma-y_0\cos\gamma-y'(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)\Longrightarrow$$

$$y'=(y-y_0)\cos\gamma-(x-x_0)\sin\gamma$$

$$x\cos\gamma+y\sin\gamma=x_0\cos\gamma+y_0\sin\gamma+x'(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)\Longrightarrow$$

$$x'=(y-y_0)\sin\gamma+(x-x_0)\cos\gamma$$

با جایگذاری در معادله بیضی:

$$\frac{\big((y-y_0)\sin\gamma+(x-x_0)\cos\gamma\big)^2}{a^2}+\frac{\big((y-y_0)\cos\gamma-(x-x_0)\sin\gamma\big)^2}{b^2}=1$$

$$(y-y_0)^2\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)+(x-x_0)^2\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)$$
$$+2(x-x_0)(y-y_0)\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=1$$

$$(y^2+y_0^2-2yy_0)\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)+(x^2+x_0^2-2xx_0)\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)$$
$$+2(xy-xy_0-yx_0+x_0y_0)\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=1$$

$$\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{a^2}-\frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{b^2}\right)xy$$
$$+\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)y^2$$
$$+\left[\left(\frac{-2x_0\cos^2\gamma}{a^2}-\frac{2x_0\sin^2\gamma}{b^2}\right)-2y_0\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]x$$
$$+\left[\left(\frac{-2y_0\sin^2\gamma}{a^2}-\frac{2y_0\cos^2\gamma}{b^2}\right)-2x_0\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]y$$
$$+\left[y_0^2\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)+x_0^2\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)\right.$$
$$\left.+2x_0y_0\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-1\right]=0$$

معادله‌ی طولانی بالا را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\boxed{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

که ضرایب به صورت بالا تعریف می‌شوند.

برای حالت سهمی:

$$x'=\frac{y'^2}{4p}\quad (\text{معادله سهمی‌ای به محور تقارن } X')$$

$$(y-y_0)\sin\gamma+(x-x_0)\cos\gamma=\frac{\big((y-y_0)\cos\gamma-(x-x_0)\sin\gamma\big)^2}{4p}$$

$$\begin{aligned}4p(y-y_0)\sin\gamma+4p(x-x_0)\cos\gamma\\ &=(y-y_0)^2\cos^2\gamma+(x-x_0)^2\sin^2\gamma\\ &-2(x-x_0)(y-y_0)\sin\gamma\cos\gamma\end{aligned}$$

$$=(y^2+y_0^2-2yy_0)\cos^2\gamma+(x^2+x_0^2-2xx_0)\sin^2\gamma$$
$$-2(xy-xy_0-yx_0+x_0y_0)\sin\gamma\cos\gamma\quad\Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\sin^2\gamma}{p^2}\right)x^2+\left(\frac{-\sin 2\gamma}{p^2}\right)xy+\left(\frac{\cos^2\gamma}{p^2}\right)y^2$$
$$+\left(\frac{-4p\cos\gamma-2x_0\sin^2\gamma+2y_0\sin\gamma\cos\gamma}{p^2}\right)x$$
$$+\left(\frac{-4p\sin\gamma-2y_0\cos^2\gamma+2x_0\sin\gamma\cos\gamma}{p^2}\right)y$$
$$+\left(\frac{x_0^2\sin^2\gamma+y_0^2\cos^2\gamma-2x_0y_0\sin\gamma\cos\gamma+4p(y_0\sin\gamma+x_0\cos\gamma)}{p^2}\right)=0$$

باز به فرم

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

رسیدیم ولی با ضرایب متفاوت نسبت به بیضی.

در حالت هذلولی، کارمان مثل بیضی است ولی با تغییر بعضی علامات. به این صورت که:

$$\frac{\left((y-y_0)\sin\gamma+(x-x_0)\cos\gamma\right)^2}{a^2}-\frac{\left((y-y_0)\cos\gamma-(x-x_0)\sin\gamma\right)^2}{b^2}=1$$

$$(y^2+y_0^2-2yy_0)\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2}-\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)+(x^2+x_0^2-2xx_0)\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}-\frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)$$
$$+2(xy-xy_0-yx_0+x_0y_0)\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1$$

$$\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}-\frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{a^2}+\frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{b^2}\right)xy$$
$$+\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2}-\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)y^2$$
$$+\left[\left(\frac{-2x_0\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{2x_0\sin^2\gamma}{b^2}\right)-2y_0\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]x$$
$$+\left[\left(\frac{-2y_0\sin^2\gamma}{a^2}+\frac{2y_0\cos^2\gamma}{b^2}\right)-2x_0\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]y$$
$$+\left[y_0^2\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2}-\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)+x_0^2\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}-\frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)\right.$$
$$\left.+2x_0y_0\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-1\right]=0$$

و باز فرمِ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

پس نتیجه می‌گیریم که معادله کلی مقاطع مخروطی در دو بعد به صورت بالا داده می‌شود. ولی مشخصات مقطع مخروطی را از کجا پیدا کنیم؟ بگذارید قبل از آن چیز دیگری را بررسی کنیم. طبق شمّ ریاضی ای که باید به کار گیریم، برای تمیز بین مقاطع مخروطی:

بیضی:

$$\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= \left(\frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{a^2} - \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{b^2}\right)^2 - 4\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2} + \frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right) \\
&= \sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{a^2b^2}(\cos^4\gamma + \sin^4\gamma) - 4\sin^2\gamma\cos^2\gamma\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}\right) \\
&= \sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{a^2b^2}(1 - \sin^2 2\gamma) - \sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}\right) \\
&= \sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{a^2b^2} - \sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} - \frac{4}{a^2b^2}\right) \\
&= \sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{a^2b^2} - \sin^2 2\gamma\left(\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{2}{a^2b^2}\right) \\
&= \frac{2}{a^2b^2}(\sin^2 2\gamma - 2) < 0
\end{aligned}$$

پس برای بیضی همیشه $B^2 - 4AC < 0$.

سهمی:

$$B^2 - 4AC = \sin^2 2\gamma - 4\sin^2\gamma\cos^2\gamma = 0$$

هذلولی:

$$B^2-4AC=\sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-4\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}-\frac{\sin^2\gamma}{b^2}\right)\left(\frac{\sin^2\gamma}{a^2}-\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)$$
$$=\sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{4}{a^2b^2}(\cos^4\gamma+\sin^4\gamma)$$
$$-4\sin^2\gamma\cos^2\gamma\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)$$
$$=\sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{4}{a^2b^2}(1-\sin^2 2\gamma)-\sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)$$
$$=\sin^2 2\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{4}{a^2b^2}-\sin^2 2\gamma\left(\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{2}{a^2b^2}\right)$$
$$=\frac{2}{a^2b^2}(2-\sin^2 2\gamma)>0$$

و برای هذلولی همیشه $B^2-4AC>0$.

پس دیدیم که با هوشمندی ریاضی توانستیم رابطه‌ی B^2-4AC را معیار قرار دهیم که به راحتی هر معادله‌ی مقطع مخروطی هم به ما دادند بتوانیم بگوییم بیضی، سهمی یا هذلولی است.

در مرحله بعد می‌خواهیم ببینیم که اگر معادله‌ای به فرم کلی مقطع مخروطی به ما دادند غیر از این‌که نوع مقطع مخروطی را متوجه می‌شویم، چگونه بفهمیم زاویه محور اصلی آن با X (γ) چه‌قدر است؟ در این‌جا هم باید مجدداً سعی کنیم *خوب و تمیز با معادلات ریاضی بازی کنیم.*

بیضی:

A و B و C دارای اطلاعات a و b و γ هستند. لذا سه معادله داریم و سه مجهول. ولی دست نگه دارید! لازم نیست دستگاه حل کنیم. در معادلات مثلثاتی قادریم خیلی راحت بعضی چیزها را حذف کنیم:

$$A=\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\sin^2\gamma}{b^2}=\frac{1+\cos 2\gamma}{2a^2}+\frac{1-\cos 2\gamma}{2b^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{\cos 2\gamma}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$B=\sin 2\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$C=\frac{\sin^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}=\frac{1-\cos 2\gamma}{2a^2}+\frac{1+\cos 2\gamma}{2b^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\frac{\cos 2\gamma}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$A-C=\cos 2\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$\tan 2\gamma=\frac{\dfrac{B}{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}}{\dfrac{A-C}{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}}\quad\Longrightarrow\quad \gamma=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$$

و اما نیم‌قطر بزرگ و کوچک:

$$A+C=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\qquad \text{و}\quad \frac{A-C}{\cos 2\gamma}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\quad\Longrightarrow\ \frac{2}{a^2}=A+C+\frac{A-C}{\cos 2\gamma}$$

$$a^2=\frac{2\cos 2\gamma}{A(1+\cos 2\gamma)-C(1-\cos 2\gamma)}=\frac{\cos 2\gamma}{A\cos^2\gamma-C\sin^2\gamma}$$

$$\frac{2}{b^2}=(A+C)-\frac{A-C}{\cos 2\gamma}\ \ \Longrightarrow$$

$$b^2=\frac{2\cos 2\gamma}{C(1+\cos 2\gamma)-A(1-\cos 2\gamma)}=\frac{\cos 2\gamma}{C\cos^2\gamma-A\sin^2\gamma}$$

با توجه به این‌که γ را برحسب ضرایبمان قبلاً به دست آوردیم، با توجه به دو رابطه‌ی بالا نیم‌قطر بزرگ و کوچک برحسب ضرایب به دست می‌آیند. ولی اگر بخواهیم به رابطه‌ی مستقیمی هم برسیم:

$$\cos 2\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\gamma}}\ \Longrightarrow$$

$$a^2 = \frac{2}{A\left(\sqrt{1+\tan^2 2\gamma}+1\right) - C\left(\sqrt{1+\tan^2 2\gamma}-1\right)}$$
$$= \frac{2}{A\left(\sqrt{1+\left(\frac{B}{A-C}\right)^2}+1\right) - C\left(\sqrt{1+\left(\frac{B}{A-C}\right)^2}-1\right)}$$
$$= \frac{2}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

$$b^2 = \frac{2}{C\left(\sqrt{1+\tan^2 2\gamma}+1\right) - A\left(\sqrt{1+\tan^2 2\gamma}-1\right)}$$
$$= \frac{2}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

بگذارید نتیجه‌ای جالب را بررسی کنیم:

$$a^2b^2 = \frac{4}{(A+C)^2-(A-C)^2-B^2} = \frac{4}{4AC-B^2}$$

چون که طرف چپ تساوی همیشه مثبت است لذا باید برای بیضی $B^2 - 4AC < 0$.

سهمی:

$$\tan 2\gamma = \frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma} = \frac{\sin 2\gamma}{\cos^2\gamma - \sin^2\gamma} = \frac{-B}{C-A} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$$

$$(A-C)^2 + B^2 = \frac{\cos^2 2\gamma}{p^4} + \frac{\sin^2 2\gamma}{p^4} = \frac{1}{p^4} \quad \Longrightarrow \quad p^2 = \frac{1}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

هذلولی:

$$A = \frac{\cos^2\gamma}{a^2} - \frac{\sin^2\gamma}{b^2} = \frac{1+\cos 2\gamma}{2a^2} - \frac{1-\cos 2\gamma}{2b^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{\cos 2\gamma}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$B = \sin 2\gamma \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$C=\frac{\sin^2\gamma}{a^2}-\frac{\cos^2\gamma}{b^2}=\frac{1-\cos 2\gamma}{2a^2}-\frac{1+\cos 2\gamma}{2b^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{\cos 2\gamma}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$A-C=\cos 2\gamma\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$\tan 2\gamma=\frac{\dfrac{B}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}{\dfrac{A-C}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}\ \Longrightarrow\ \gamma=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$$

a و b هذلولی:

$$A+C=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\quad \text{و}\quad \frac{A-C}{\cos 2\gamma}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\quad\Longrightarrow\ \frac{2}{a^2}=A+C+\frac{A-C}{\cos 2\gamma}\ \Longrightarrow$$

$$a^2=\frac{2}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}+A+C}$$

$$\frac{2}{b^2}=\frac{A-C}{\cos 2\gamma}-(A+C)\ \Longrightarrow\ b^2=\frac{2}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}-(A+C)}$$

$$a^2b^2=\frac{4}{(A-C)^2+B^2-(A+C)^2}=\frac{4}{B^2-4AC}$$

و برای هذلولی همیشه داریم $B^2-4AC>0$.

** معادله کلی مقاطع مخروطی در سه بعد

حال در فضا چه کنیم؟ در سه بعد، کارمان این است که مسئله را روی صفحه‌ای با جهت‌گیری دل‌خواه در فضا، به حالت کلی نسبت به مبدأ مختصات در سه بعد تبدیل کنیم. صفحه‌ای که مقطع مخروطی در آن است را با p نشان می‌دهیم. صفحه‌ی p با صفحه XY زاویه دل‌خواه θ دارد. هم‌چنین p با XY در یک خط به نام d در صفحه هم‌دیگر را قطع می‌کنند. صفحه را با دو مولفه‌ی شیب و عرض از مبدأ خط d و هم‌چنین با زاویه θ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم d محور Yها را در y_0 قطع می‌کند. دستگاه مختصات پریم‌دار را طوری تعریف می‌کنیم که Z' موازی با Z باشد و صفحه‌ی

$X'Y'$ منطبق بر XY باشد و مبدأِ O' در نقطه‌ی $(0,y_0,0)$ قرار گرفته باشد و محور Y' در راستای خط d قرار گرفته باشد. زاویه‌ی d با محور X را α می‌نامیم. تبدیل مختصات:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90-\alpha) & -\sin(90-\alpha) & 0 \\ \sin(90-\alpha) & \cos(90-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-y_0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\sin\alpha-(y-y_0)\cos\alpha \\ x\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha \\ z \end{bmatrix}$$

حال دستگاه مختصات سومی تعریف می‌کنیم به این صورت که O'' بر O' منطبق باشد و Y'' بر Y' منطبق باشد و Z'' روی صفحه‌ی p قرار گرفته باشد. می‌دانیم که Z' باید به اندازه $90-\theta$ حول Y' بچرخد تا روی Z'' قرار بگیرد پس:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90-\theta) & 0 & \sin(90-\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(90-\theta) & 0 & \cos(90-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'\sin\theta+z'\cos\theta \\ y' \\ -x'\cos\theta+z'\sin\theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x\sin\alpha\sin\theta-(y-y_0)\cos\alpha\sin\theta+z\cos\theta \\ x\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha \\ -x\sin\alpha\cos\theta+(y-y_0)\cos\alpha\cos\theta+z\sin\theta \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در دستگاه جدید معادله مقطع مخروطی به صورت زیر است:

$$Ay''^2+By''z''+Cz''^2+Dy''+Ez''+F=0$$

که ضرایب را قبلاً به دست آورده‌ایم. مختصات مرکز مقطع مخروطی را در دستگاه سوم با $(x''_0\ ,\ y''_0)$ نشان می‌دهیم.
با جایگذاری ماتریس در معادله بالا:

$$\begin{aligned} A(x\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha)^2 \\ +B(x\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha)(-x\sin\alpha\cos\theta \\ +(y-y_0)\cos\alpha\cos\theta+z\sin\theta) \\ +C(-x\sin\alpha\cos\theta+(y-y_0)\cos\alpha\cos\theta+z\sin\theta)^2 \\ +D(x\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha) \\ +E(-x\sin\alpha\cos\theta+(y-y_0)\cos\alpha\cos\theta+z\sin\theta)+F=0 \end{aligned}$$

با مرتب‌سازی:

$$\begin{aligned}(A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta + C\sin^2\alpha\cos^2\theta)x^2 \\ + (A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta + C\cos^2\alpha\cos^2\theta)y^2 \\ + (C\sin^2\theta)z^2 \\ + (A\sin 2\alpha + B\cos^2\alpha\cos\theta - B\sin^2\alpha\cos\theta \\ - C\sin 2\alpha\cos^2\theta)xy + (B\cos\alpha\sin\theta - C\sin\alpha\sin 2\theta)xz \\ + (B\sin\alpha\sin\theta + C\cos\alpha\sin 2\theta)yz \\ + (-y_0(A\sin 2\alpha + B\cos^2\alpha\cos\theta - B\sin^2\alpha\cos\theta \\ - C\sin 2\alpha\cos^2\theta) + D\cos\alpha - E\sin\alpha\cos\theta)x \\ + (-2y_0(A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta + C\cos^2\alpha\cos^2\theta) \\ + D\sin\alpha + E\cos\alpha\cos\theta)y \\ + (-y_0(B\sin\alpha\sin\theta + C\cos\alpha\sin 2\theta) + E\sin\theta)z \\ + (y_0^2(A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta + C\cos^2\alpha\cos^2\theta) \\ - y_0(D\sin\alpha + E\cos\alpha\cos\theta) + F) = 0\end{aligned}$$

یا به فرمِ:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D'xy + E'xz + F'yz + G'x + H'y + I'z + J' = 0$$

می‌توانیم بعضی ضرایب طولانی بالا را بر حسب بعضی دیگر بنویسیم:

$$\begin{cases} G' = -D'y_0 + D\cos\alpha - E\sin\alpha\cos\theta \\ H' = -2B'y_0 + D\sin\alpha + E\cos\alpha\cos\theta \\ I' = -F'y_0 + E\sin\theta \\ J' = B'y_0^2 - y_0(D\sin\alpha + E\cos\alpha\cos\theta) + F \end{cases}$$

در این‌جا هم برای ساده‌سازی معادلات طولانی باید شگردهای ریاضی به کار گیریم. در حالت دو بعد، یک روش برای این که بفهمیم مقطع مخروطیمان چیست، آزمایش $B^2 - 4AC$ بود و B ضریب xy بود (که به آن می‌گوییم ضریب مشترک) ولی A و C هر کدام ضریب‌های فقط یک مؤلفه (ضریب تک مؤلفه‌ای) بودند مثل x^2 و y^2 و اشتراکی در کار نیست این‌جا. بگذارید ببینیم اگر این موضوع را بسط دهیم در حالت کلی به چه نتایجی می‌رسیم. یعنی آزمایش ما می‌شود:

جمع ضرب‌های دو به دوی ضریب‌های تک مؤلفه‌ای * ۴ − جمع توان‌های دوی ضریب‌های مشترک

به عبارت ریاضی در سه بعد:

$$(D'^2 + E'^2 + F'^2) - 4(A'B' + A'C' + B'C')$$

با جایگذاری ضریب‌ها که قبل‌تر حسابشان کردیم می‌توانید با اعمال فرآیندهای جبری ساده‌ای نشان دهید (حتماً این کار را بکنید):

$$(D'^2+E'^2+F'^2)-4(A'B'+A'C'+B'C')=B^2-4AC$$

می‌بینیم که چه‌قدر زیبا، تست ما ناوردا شد یعنی تستمان برای سه بعدی، هم ارز شد با تست دو بعدی. پس در سه بعد:

$$(D'^2+E'^2+F'^2)-4(A'B'+A'C'+B'C')\begin{cases}<0 & \text{بیضی}\\ =0 & \text{سهمی}\\ >0 & \text{هذلولی}\end{cases}$$

برای a و b چه کنیم؟ باز از روش مقایسه‌ای استفاده می‌کنیم. برای حالت دو بعدی داشتیم:

$$a^2=\frac{2}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

اگر به نحوی بتوانیم از ضریب‌های معادله سه بعدی به مخرج رابطه پایین برسیم کار حل است.

$$A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}=A+C+\sqrt{A^2+C^2-2AC+B^2}$$

باز الگوسازی می‌کنیم ببینیم به نتایج مطلوبی می‌رسیم یا خیر:

جمع ضریب‌های تک مؤلفه‌ای

$$+\sqrt{\text{جمع مربع‌های ضریب‌های تک مؤلفه‌ای} - 2 * (\text{جمع ضرب‌های دو به دوی ضریب‌های تک مؤلفه‌ای}) + \text{جمع مربع‌های ضریب‌های مشترک}}$$

به زبان ریاضی:

$$(A'+B'+C') \\ +\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'-2A'C'-2B'C'+(D'^2+E'^2+F'^2)}$$

مجدداً این جا زیبایی کار ریاضی می‌آید به کمکمان و می‌گوید: (شما هم حتماً بگویید!)

$$\pm(A'+B'+C') \\ +\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'-2A'C'-2B'C'+(D'^2+E'^2+F'^2)} \\ =\pm(A+C)+\sqrt{(A-C)^2+B^2}$$

پس:

$$a^2 = \frac{2}{A' + B' + C' + \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 - 2A'B' - 2A'C' - 2B'C' + (D'^2 + E'^2 + F'^2)}}$$

$$b^2 = \frac{2}{A' + B' + C' - \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 - 2A'B' - 2A'C' - 2B'C' + (D'^2 + E'^2 + F'^2)}}$$

مثل قبل ضربی انجام می‌دهیم:

$$a^2b^2 = \frac{4}{(A' + B' + C')^2 - A'^2 - B'^2 - C'^2 + 2A'B' + 2A'C' + 2B'C' - (D'^2 + E'^2 + F'^2)}$$

$$= \frac{4}{4(A'B' + A'C' + B'C') - (D'^2 + E'^2 + F'^2)}$$

قبلاً به دست آورده بودیم که برای بیضی، مخرج همیشه مثبت است و این با مثبت بودن طرف چپ تساوی در توافق است. برای هذلولی:

$$a^2 = \frac{2}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 - 2A'B' - 2A'C' - 2B'C' + (D'^2 + E'^2 + F'^2)} + A' + B' + C'}$$

$$b^2 = \frac{2}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 - 2A'B' - 2A'C' - 2B'C' + (D'^2 + E'^2 + F'^2)} - (A' + B' + C')}$$

$$a^2b^2 = \frac{4}{(D'^2 + E'^2 + F'^2) - 4(A'B' + A'C' + B'C')}$$

و برای هذلولی هم که قبلاً در آوردیم مخرج همیشه مثبت است که با توجه به طرف چپ، امری منطقیست.

برای سهمی هم می‌دانیم که:

$$p^2 = \frac{1}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}$$

پس با مشابه سازی‌ای که برای ضرایب پریم‌دار کردیم داریم:

$$p^2 = \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 - 2A'B' - 2A'C' - 2B'C' + (D'^2 + E'^2 + F'^2)}}$$

هم‌چنین به روشی دیگر می‌توانیم به قسمت زیر رادیکال مخرج برسیم. می‌دانیم که:

$$A' + B' + C' = A + C$$

و فعلاً قادر شدیم ضرایب بدون پریم را به پریم‌دار ها تبدیل کنیم. پس تنها کار ما این است که ببینیم چگونه:

$$(A-C)^2+B^2$$

را به ضرایب پریم‌دار تبدیل کنیم:

$$(A+C)^2-4AC=(A-C)^2 \quad \Longrightarrow \quad B^2+(A-C)^2=(A+C)^2+(B^2-4AC)$$

قبلاً معادلِ B^2-4AC را پیدا کرده بودیم. با جایگذاری:

$$\begin{aligned} B^2+(A-C)^2 &\\ &= (A'+B'+C')^2+(D'^2+E'^2+F'^2) \\ &-4(A'B'+A'C'+B'C') \\ &= A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'-2A'C'-2B'C'+(D'^2+E'^2+F'^2) \end{aligned}$$

و این همان چیزیست که در قبل با حدس و آزمایش و بدون پشتوانه‌ی ریاضیِ دقیقی به آن رسیدیم.

در سه بعد شاید خیلی دانستن γ برایمان مهم نباشد چون اول باید صفحه مقطع مخروطی را پیدا کنیم و بعد γ تازه جهت گیری را در آن صفحه به ما می‌گوید که شاید خیلی برایمان مهم نباشد. در چنین مواقعی و در سه بعد بردارها خیلی به کمک ما می‌آیند. در پیدا کردن صفحه مقطع مخروطی یا.... بیش از این کار با هندسه دکارتی شاید خسته‌کننده به نظر برسد.

پیدا کردن x_0 و y_0 و نکاتی مهم در استفاده از $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ در دو بعد

دیدیم که تمام کارمان در تعیین مشخصات مقطع مخروطی به ضرایب A و B و C ربط داشت. سؤالی که پیش می‌آید این‌است که بقیه ثوابت یعنی D و E و F به چه کار می‌آیند. خیلی واضح است که با توجه به معادله، x_0 و y_0 یعنی نشانی مرکز مقطع مخروطی فقط در این سه ضریب ظاهر می‌شوند لذا سه معادله داریم و دو مجهول. گمان نکنید که یک معادله اضافی است و به کار نمی‌آید. در جایی دیگر از آن استفاده خواهیم کرد. با این وصف:

$$D=\left(\frac{-2x_0\cos^2\gamma}{a^2}-\frac{2x_0\sin^2\gamma}{b^2}\right)-2y_0\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$E=\left(\frac{-2y_0\sin^2\gamma}{a^2}-\frac{2y_0\cos^2\gamma}{b^2}\right)-2x_0\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

با جانشانی ضریب‌های گذشته:

$$\begin{cases}-2Ax_0 - By_0 = D \\ -Bx_0 - 2Cy_0 = E\end{cases}$$

می‌توان با حل دو معادله‌ی بالا، دو مجهول x_0 و y_0 را پیدا کرد. با روش‌های مختلفی می‌توان حل کرد ولی ما دستور کرامر را برمی‌گزینیم:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & -B \\ E & -2C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2A & -B \\ -B & -2C \end{vmatrix}} = \frac{EB - 2DC}{4AC - B^2}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} -2A & D \\ -B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2A & -B \\ -B & -2C \end{vmatrix}} = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2}$$

دقت کنید که روابط بالا برای بیضی و هذلولی بر قرارند.

و اما نقش F چه می‌شود؟ خوب است به مثال زیر توجه کنید.

مقطعی مخروطی داریم به معادله‌ی:

$$2x^2 + 7xy - 3y^2 + x + 10y - 4 = 0$$

طبق معادله‌هایی که در آوردیم می‌توانیم یک a و b برای معادله‌ی بالا به دست آوریم. حال معادله زیر را نگاه کنید:

$$6 + 21xy - 9y^2 + 3x + 30y - 12 = 0$$

اگر دقت کنید می‌بینید که معادله‌ی دومی در واقع همان معادله‌ی اول است که ضرب در ۳ شده است و عملاً همان معادله است. حال ضرایب تغییر کرده‌اند. باید ببینیم با تغییر ضرایب چه چیزهایی تغییر می‌کنند و چه چیزهایی ثابتند. زاویه γ چون که به صورت $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$ است و اگر همه‌ی ضرایب را ضرب‌در عددی مشخص بکنیم صورت و مخرج ضرب‌در یک عدد می‌شوند لذا γ بدون تغییر می‌ماند. ولی اگر دقت کنید a و b این‌گونه نیستند، چرا که در مخرج، ضرایب وجود دارد ولی در صورت چیزی ما به ازای آن نیست، پس با تغییر ضرایب، a و b هم تغییر می‌کنند. سؤال این است که اگر به ما معادله‌ی مقطعی مخروطی دادند چگونه بفهمیم که آیا می‌توان به ضرایب آن اعتماد کرد که از فرمول‌های محاسبه شده a و b را بیابیم یا خیر؟؛ مثلاً معادله‌ای که به ما داده‌اند معادله‌ی اصلی‌ای که ما قبل‌تر به دست آوردیم نیست و ضرب‌در عددی شده است که تازه آن عدد را هم نمی‌دانیم چیست. راه حل این مشکل در F نهفته است.
اگر از معادله‌ی مقطع مخروطی اصیل استفاده کنیم (فعلاً بیضی) ضرایب به گونه‌ای هستند که قبلاً در آوردیم:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\cos^2\gamma}{a^2} + \dfrac{\sin^2\gamma}{b^2} \\ B = \dfrac{2\sin\gamma\cos\gamma}{a^2} - \dfrac{2\sin\gamma\cos\gamma}{b^2} \\ C = \dfrac{\sin^2\gamma}{a^2} + \dfrac{\cos^2\gamma}{b^2} \\ D = -2Ax_0 - By_0 \\ E = -Bx_0 - 2Cy_0 \\ F = Ax_0^2 + Cy_0^2 + Bx_0y_0 - 1 \end{cases}$$

اگر کمی دقت کنید می‌بنید که:

$$Dx_0 + Ey_0 + 2F = -2$$

معادله بالا برای هذلولی هم صادق است(امتحان کنید). در ابتدا باید ببینیم که آیا x_0 و y_0 هم مثل γ اگر عددی را در معادله ضرب کنیم بدون تغییر می‌مانند یا خیر؟ واضح است که آن‌ها هم مثل γ نسبت به ضرب عدد در معادله حساس نیستند چرا که هم در x_0 و هم در y_0 در صورت و مخرج ضرایب وجود دارد و اگر صورت و مخرج در یک عدد ضرب شوند فرقی به حال کسر نمی‌کند. حال، رابطه‌ای که در بالا به دست آوردیم با توجه به این که قطعاً x_0 و y_0 را داریم (مستقل از این که آیا معادله‌ی اصلی را داریم یا خیر) به ما کمک می‌کند که اگر رابطه‌ی بالا صادق بود، یعنی معادله‌ی ما معادله‌ی اصلی مقطع مخروطی است و a و b که به دست می‌آوریم، درست‌اند و نیاز به تصحیح ندارند. و اگر رابطه‌ی بالا صادق نبود باید ضریب تصحیحی مثل k در همه‌ی ضرایب ضرب کنیم به طوری که رابطه‌ی

$$(kD)x_0 + (kE)y_0 + 2(kF) = -2$$

برقرار باشد. آن گاه ضرایب جدید ما می‌شود k ضرب در ضرایب قبلی و با این ضرایب جدید a و b را حساب می‌کنیم.

ضریب k را چه انتخاب کنیم؟

$$k = -\frac{2}{Dx_0 + Ey_0 + 2F}$$

فرآیند حل مسئله را بار دیگر شرح می‌دهیم. به ما معادله‌ای می‌دهند و می‌گویند a و b را حساب کنیم. مثلاً معادله‌ای به فرمِ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

در ابتدا به راحتی x_0 و y_0 را حساب می‌کنیم و این‌ها می‌شود مختصات مرکز مقطع مخروطی:

$$x_0 = \frac{EB - 2DC}{4AC - B^2} \quad \text{و} \quad y_0 = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2}$$

سپس k را حساب می‌کنیم:

$$k=-\frac{2}{Dx_0+Ey_0+2F}=\frac{2(B^2-4AC)}{DEB-2D^2C+EDB-2AE^2-2F(B^2-4AC)}$$
$$=\frac{(B^2-4AC)}{EDB-D^2C-E^2A-F(B^2-4AC)}$$

اگر k برابر با یک شد آن گاه a و b این‌طور داده می‌شوند: (برای بیضی)

$$a^2=\frac{2}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

$$b^2=\frac{2}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

اگر k برابر با یک نشد آن گاه تعریف می‌کنیم:

$$A'=kA \quad B'=kB \quad C'=kC \quad D'=kD \quad E'=kE \quad F'=kF$$

سپس:

$$a^2=\frac{2}{A'+C'+\sqrt{(A'-C')^2+B'^2}}$$

$$b^2=\frac{2}{A'+C'-\sqrt{(A'-C')^2+B'^2}}$$

هم چنین می‌دانیم که k هرچه باشد فرقی به حال γ و x_0 و y_0 ندارد و برای این سه، فرمول‌های قبلی معتبرند. مطالب بالا برای هذلولی هم معتبرند به این شرط که از فرمول a و b مربوط به هذلولی استفاده کنیم.

ولی روابط بالا برای بیضی و هذلولی برقرار بودند. کار برای سهمی به شکل دیگری است:

$$D=\frac{-4p\cos\gamma-2x_0\sin^2\gamma+2y_0\sin\gamma\cos\gamma}{p^2}=-\frac{4\cos\gamma}{p}-2Ax_0-By_0$$

$$E=\frac{-4p\sin\gamma-2y_0\cos^2\gamma+2x_0\sin\gamma\cos\gamma}{p^2}=-\frac{4\sin\gamma}{p}-Bx_0-2Cy_0$$

$$\begin{cases} 2Ax_0 + By_0 = -\dfrac{4\cos\gamma}{p} - D \\ Bx_0 + 2Cy_0 = -\dfrac{4\sin\gamma}{p} - E \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{4\cos\gamma}{p} - D & B \\ -\dfrac{4\sin\gamma}{p} - E & 2C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix}} = \frac{EB - 2DC + \dfrac{4}{p}(B\sin\gamma - 2C\cos\gamma)}{4AC - B^2}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2A & -\dfrac{4\cos\gamma}{p} - D \\ B & -\dfrac{4\sin\gamma}{p} - E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix}} = \frac{BD - 2AE + \dfrac{4}{p}(B\cos\gamma - 2A\sin\gamma)}{4AC - B^2}$$

اگر کمی دقت کنیم می‌بینیم که در سهمی:

$$Dx_0 + Ey_0 + 2F = \frac{4}{p}(x_0\cos\gamma + y_0\sin\gamma)$$

برقرار است. به نظر می‌رسد برای سهمی شاید کار به راحتی بیضی و هذلولی نباشد چرا که اگر به معادله‌های زیر نگاه کنید می‌بینید که این دفعه x_0 و y_0 این گونه نیستند که اگر ضرایب هر چه‌باشند (ولو تغییر کرده) به ما جواب درست x_0 و y_0 را بدهند؛کافیست p را از معادله‌ی آخری سری معادلات زیر در x_0 و y_0 جایگذاری کنید. خواهید دید که اگر همه‌ی ضرایب را در عددی مثل k ضرب کنیم، دیگر صورت و مخرج همدیگر را ساده نخواهند کرد. فعلاً ناچاریم که از چند معادله زیر، همزمان استفاده کنیم:

$$\gamma = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$$

$$x_0 = \frac{EB - 2DC + \dfrac{4}{p}(B\sin\gamma - 2C\cos\gamma)}{4AC - B^2}$$

$$y_0 = \frac{BD - 2AE + \dfrac{4}{p}(B\cos\gamma - 2A\sin\gamma)}{4AC - B^2}$$

$$Dx_0 + Ey_0 + 2F - \frac{4}{p}(x_0\cos\gamma + y_0\sin\gamma) = 0$$

$$p = \frac{1}{((A-C)^2+B^2)^{\frac{1}{4}}}$$

که رابطه‌ی آخری را قبلاً به دست آورده بودیم. پنج رابطه‌ی بالا باید همزمان برقرار باشند و برای این که وقتی یک معادله سهمی با ضرایب مشخص به ما دادند، بتوانیم p واقعی را بیابیم، باید همه‌ی ضرایب را ضرب‌در عددی بکنیم (k) به طوری که پنچ معادله‌ی بالا همزمان صادق باشد و این را احتمالاً می‌توان با آزمون و خطا یا برنامه‌نویسی انجام داد. البته این ناگفته نماند که بعضی جاها که کارمان با مختصات دکارتی سخت می‌شود شاید راه‌های ساده‌تر برداری وجود داشته باشد.

پیدا کردن y_0، α و θ و نکاتی مهم در استفاده از معادله مقطع مخروطی در سه بعد

می‌دانیم که با پنج نقطه‌ی مشخص شده به صورتی که درست مختصات‌بندی شده باشند و همه در یک صفحه باشند، می‌توان معادله‌ی هر مقطع مخروطی را در آورد. این را برای دو بعد که تعداد ضراییمان ۶تاست و یکی را می‌توان با تقسیم دیگران بر آن حذف کرد به طوری که پنج ضریب بماند، می‌فهمیم ولی برای حالت سه بعد که ده ضریب داریم(!) و لااقل می‌توانیم یکی را حذف کنیم، به نظر می‌رسد باید ۹ نقطه را معلوم کنند تا بتوانیم معادلات را حل کنیم و انگار ۵ نقطه کافی نیست. نکته در این‌جاست که اگر سؤال را هوشمندانه مطرح کرده باشند قطعاً نقاطی به ما می‌دهند که همگی در یک صفحه‌اند و به این ترتیب یک معادله صفحه هم داریم. در مسئله ۱۴ نشان خواهید داد که معادله یک صفحه در سه بعد به این شکل داده می‌شود:

$$\bar{A}x + \bar{B}y + \bar{C}z = 1 \text{ یا } 0$$

که $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\bar{C}$ ثابتند که باید با حل دستگاه معادله تعیین شوند و علامت بار روی آن‌ها صرفاً برای این است که با ثابت‌هایی که قبلاً داشتیم اشتباه نشود. می‌بینیم که سه ضریب داریم و بنابراین سه نقطه برای مشخص کردن یک صفحه کافی‌اند (چیزی که در هندسه هم آن را قبول داریم) بنابراین وقتی به ما پنج نقطه می‌دهند به طوری که معقولانه همگی باید روی یک صفحه باشند، می‌توانیم بلافاصله با سه نقطه از آن‌ها صفحه‌ی مقطع مخروطی را در فضا مشخص کنیم. پس یعنی تمام آدرس‌ها صفحه در سه بعد که قبلاً از آن‌ها استفاده کردیم را داریم مثلاً؛ y_0، α و θ. می‌دانیم خط d در در صفحه XY است لذا در نقاط آن $z = 0$. پس معادله‌ی d می‌شود:

$$\bar{A}x + \bar{B}y = 1 \text{ یا } 0$$

و:

$$y_0 = \frac{1}{\bar{B}} \text{ یا } 0 \quad \text{و} \quad \tan\alpha = -\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$$

برای پیدا کردن θ ناچاریم کمی برداری حل کنیم. در مسئله ۱۴ نشان می‌دهید که بردارِ

$$\vec{N} = \bar{A}\hat{\imath} + \bar{B}\hat{\jmath} + \bar{C}\hat{k}$$

برداری است عمود بر صفحه‌ی مقطع مخروطی (p). بنابراین زاویه‌ی آن با محور Z (θ)که مساوی است با زاویه p با XY می‌شود:

$$\vec{N}.\hat{k} = |\vec{N}|\cos\theta = \bar{C} \;\;\Rightarrow\;\; \cos\theta = \frac{\bar{C}}{\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2}}$$

θ هم بدین ترتیب به دست می‌آید.

**روشی عملی و محاسباتی برای پیدا کردن مشخصات مقطع مخروطی در سه بعد

حال که α y_0 و θ را داریم، در معادله‌ی طولانی مقطع مخروطی، فقط A، B، C، D، E و F مجهولند که باز با تقسیم دیگران بر یکی، پنج مجهول خواهیم داشت. ولی استفاده از معادله طولانی مقطع مخروطی خیلی سخت است. شاید بهتر باشد از همان ضرایب پریم‌دار استفاده کنیم. بار دیگر بعضی ضرایب پریم‌دار را که قبلاً نوشته بودیم این‌جا می‌آوریم:

$$\begin{cases} G' = -D'y_0 + D\cos\alpha - E\sin\alpha\cos\theta \\ H' = -2B'y_0 + D\sin\alpha + E\cos\alpha\cos\theta \\ I' = -F'y_0 + E\sin\theta \\ J' = B'y_0^2 - y_0(D\sin\alpha + E\cos\alpha\cos\theta) + F \end{cases}$$

هدف ما این است که یک سری رابطه جدید بین *فقط* ضرایب پریم‌دار به دست آوریم و ضرایب بدون‌پریم بالا را باید حذف کنیم.

$$E\sin\theta = I' + F'y_0 \;\;\Longrightarrow$$

$$(G' + D'y_0)\sin\theta = D\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\,(I' + F'y_0) \;\;\Longrightarrow$$

$$D\cos\alpha\sin\theta = (G' + D'y_0)\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta\,(I' + F'y_0)$$

$$H'\sin\theta = -2B'y_0\sin\theta + D\sin\theta\sin\alpha + (I' + F'y_0)\cos\alpha\cos\theta \;\;\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &H'\sin\theta\cos\alpha \\ &= -2B'y_0\sin\theta\cos\alpha + (G' + D'y_0)\sin\theta\sin\alpha \\ &+ \sin^2\alpha\cos\theta\,(I' + F'y_0) + (I' + F'y_0)\cos^2\alpha\cos\theta \;\;\Longrightarrow \end{aligned}$$

$$(H' + 2B'y_0)\tan\theta\cos\alpha = (G' + D'y_0)\tan\theta\sin\alpha + \ (I' + F'y_0)$$

پنج معادله از پنج نقطه داریم از طرفی معادله‌ی بالا هم داریم بین ضرایب پریم‌دار، پس تا این‌جا شش معادله داریم. حداقل به سه معادله دیگر نیاز داریم. کمی در معادلات می‌تابیم تا معادله جور کنیم! مثلا:

$$C' = C\sin^2\theta \quad \text{و} \quad F'\cos\alpha - E'\sin\alpha = C(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin 2\theta = C\sin 2\theta$$
$$\Longrightarrow 2C'\cot\theta = \ F'\cos\alpha - E'\sin\alpha$$

رابطه‌ی بالا هفتمین رابطه است. از طرفی می‌دانستیم که:

$$A' + B' + C' = A + C = A + \frac{C'}{\sin^2\theta} \ \ \Longrightarrow \ A = A' + B' - C'\cot^2\theta$$

هم‌چنین:

$$A' = A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta + C\sin^2\alpha\cos^2\theta \Longrightarrow$$

$$B\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha\cos^2\theta - A'$$
$$= -A'\sin^2\alpha + B'\cos^2\alpha - C'\cot^2\theta\cos 2\alpha$$

حال:

$$E'\cos\alpha + F'\sin\alpha = B\sin\theta$$

و رابطه‌ای دیگر:

$$E'\cos\alpha + F'\sin\alpha = -A'\tan\theta\tan\alpha + B'\tan\theta\cot\alpha - 2C'\cot\theta\cot 2\alpha$$

و بالأخره برای به دست آوردن آخرین رابطه می‌دانیم:

$$D' = A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha\cos\theta - C\sin 2\alpha\cos^2\theta$$

با جایگذاری A، B و C داریم:

$$\begin{aligned}D' = {} & A'\sin 2\alpha + B'\sin 2\alpha - C'\sin 2\alpha\cot^2\theta - 2A'\sin^2\alpha\cot 2\alpha \\ & + 2B'\cos^2\alpha\cot 2\alpha - 2C'\cot^2\theta\cos 2\alpha\cot 2\alpha - C'\sin 2\alpha\cot^2\theta \\ & = A'(\sin 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cot 2\alpha) + B'(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha\cot 2\alpha) \\ & - 2C'\frac{\cot^2\theta}{\sin 2\alpha}\end{aligned}$$

معادلاتی که در دست داریم در یک نگاه:

$$\begin{cases} \bar{A}x+\bar{B}y+\bar{C}z=1 \text{ یا } 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{A} \text{ و } \bar{B} \text{ و } \bar{C} \\ \tan\alpha=-\dfrac{\bar{A}}{\bar{B}} \quad \text{و} \quad \cos\theta=\dfrac{\bar{C}}{\sqrt{\bar{A}^2+\bar{B}^2+\bar{C}^2}} \text{ و } y_0=\dfrac{1}{\bar{B}} \text{ یا } 0 \\ \left(\text{معادلات 1 تا 5}\right) A'x^2+B'y^2+C'z^2+D'xy+E'xz+F'yz+G'x+H'y+I'z+J'=0 \\ \left(\text{معادله 6}\right) (H'+2B'y_0)\tan\theta\cos\alpha-(G'+D'y_0)\tan\theta\sin\alpha-(I'+F'y_0)=0 \\ \left(\text{معادله 7}\right) 2C'\cot\theta+E'\sin\alpha-F'\cos\alpha=0 \\ \left(\text{معادله 8}\right) A'\tan\theta\tan\alpha-B'\tan\theta\cot\alpha+2C'\cot\theta\cot2\alpha+E'\cos\alpha+F'\sin\alpha=0 \\ \left(\text{معادله 9}\right) A'(\sin2\alpha-2\sin^2\alpha\cot2\alpha)+B'(\sin2\alpha+2\cos^2\alpha\cot2\alpha)-2C'\dfrac{\cot^2\theta}{\sin2\alpha}-D'=0 \end{cases}$$

اگر احیاناً فکر می‌کنید که شاید معادلات بالا تکراری‌اند باید گفت که این‌طور نیست و امتحان شده‌اند! ابتدا با سه نقطه از حداقل پنج نقطه‌ای که برای تعیین یک مطع مخروطی به ما می‌دهند، مشخصات صفحه‌ی شکلمان را پیدا می‌کنیم سپس با پنج نقطه‌ی معلوم که داریم پنج معادله با معادله اصلی مقطع مخروطی می‌سازیم سپس از چهار معادله‌ی ۶ تا ۹ هم استفاده می‌کنیم تا بتوانیم با حل دستگاه نُه معادله همه‌ی ضرایب را به غیر از J' که فعلاً آن را یک فرض می‌کنیم، بیابیم. حال در دو بعد، گفتیم که به طور مطلق نمی‌توان به ضرایب به دست آمده اعتماد کرد چرا که ممکن است همگی ضرب‌در عددی خاص شده باشند که البته تعیین کردیم که باید چه بکنیم و گفتیم که عدد k را در همه‌ی ضرایب ضرب بکنیم و با استفاده از ضرایب جدید به دست آمده در فرمول a و b، به مقدارهای درستی نائل آییم. برای سه بعد چه کنیم؟ فرض کنید ما توانستیم دستگاه معادلات را حل کنیم یا اصلاً به ما معادله‌ای مثل زیر دادند:

$$A''x^2+B''y^2+C''z^2+D''xy+E''xz+F''yz+G''x+H''y+I''z+1=0$$

ابتدا نُه ضریب را به روش ذکر شده می‌یابیم ولی به آن‌ها اعتماد نمی‌کنیم! فرض می‌کنیم که همه‌ی ضرایب بالا ضرب در عددی (k') شده باشند. یعنی ضرایب اولیه پریم‌دار باشند:

$$A''=k'A' \quad \text{الی آخر}$$

پس:

$$k'J'=1 \;\Rightarrow$$

$$y_0^2\big((k'A)\sin^2\alpha+(k'B)\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta+(k'C)\cos^2\alpha\cos^2\theta\big) \\ -y_0\big((k'D)\sin\alpha+(k'E)\cos\alpha\cos\theta\big)+(k'F)=1$$

اگر معادله‌ی

$$A''x^2+B''y^2+C''z^2+D''xy+E''xz+F''yz+G''x+H''y+I''z+1=0$$

را حل کنیم وضرایب را به دست آوریم، اگر همه‌ی ضرایبی که به دست آوردیم را تقسیم بر k' کنیم به ضرایب پریم‌دار می‌رسیم. حال ضرایب بدون پریم را که قبلاً بر حسب ضرایب پریم‌دار به دست آورده بودیم، بار دیگر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} A = A' + B' - C' \cot^2\theta \\ B \sin\alpha \cos\alpha \cos\theta = -A' \sin^2\alpha + B' \cos^2\alpha - C' \cot^2\theta \cos 2\alpha \\ C = \dfrac{C'}{\sin^2\theta} \\ D \cos\alpha \sin\theta = (G' + D' y_0) \sin\theta + \sin\alpha \cos\theta \, (I' + F' y_0) \\ E \sin\theta = I' + F' y_0 \end{cases}$$

در معادلات بالا اگر هر ضریب پریم‌دار ضرب‌در k' شود، هر ضریب بدون پریم هم ضرب‌در k' می‌شود، پس چون جواب معادله‌ی

$$A''x^2 + B''y^2 + C''z^2 + D''xy + E''xz + F''yz + G''x + H''y + I''z + 1 = 0$$

در واقع، k' ضرب در ضرایب پریم‌دار است پس اگر از معادلات داخل آکولاد بالا استفاده کنیم، ضرایب بدون پریمی که به دست می‌آوریم، در واقع k' ضرب در ضرایب بدون پریم‌اند! در واقع ما از حل آکولاد بالا به $(k'A)$ و $(k'B)$ و... می‌رسیم. از طرفی علاقه‌مندیم که کار ساده‌تر شود پس F را یک می‌گیریم و k' را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} k' = 1 + y_0\big((k'D)\sin\alpha + (k'E)\cos\alpha\cos\theta\big) \\ - y_0^2\big((k'A)\sin^2\alpha + (k'B)\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta \\ + (k'C)\cos^2\alpha\cos^2\theta\big) \end{aligned}$$

پس چون $(k'A)$ و $(k'B)$ و... را داریم، k' را پیدا می‌کنیم. ولی این تمام ماجرا نیست! چرا که ما فرض کردیم F برابر یک است در حالی که در حالت کلی چنین چیزی لزومی ندارد. همان طور که در حالت دو بعد دیدیم اگر F را یک فرض کردیم باید همه‌ی ضرایب بدون پریم را در

$$k = \frac{(B^2 - 4AC)}{EDB - D^2C - E^2A - (1)(B^2 - 4AC)}$$

ضرب کنیم تا ضرایب بدون پریم حقیقی حاصل آیند که بتوانیم به آن‌ها برای پیدا کردن مشخصات مقطع مخروطی اعتماد کنیم. از معادله‌ی بالا داریم:

$$k = \frac{\left(\left(\frac{(k'B)}{k'}\right)^2 - 4\left(\frac{(k'A)}{k'}\right)\left(\frac{(k'C)}{k'}\right)\right)}{\left(\frac{(k'E)}{k'}\right)\left(\frac{(k'D)}{k'}\right)\left(\frac{(k'B)}{k'}\right) - \left(\frac{(k'D)}{k'}\right)^2\left(\frac{(k'C)}{k'}\right) - \left(\frac{(k'E)}{k'}\right)^2\left(\frac{(k'A)}{k'}\right) - \left(\left(\frac{(k'B)}{k'}\right)^2 - 4\left(\frac{(k'A)}{k'}\right)\left(\frac{(k'C)}{k'}\right)\right)}$$

گفتیم چیزی که ما می‌توانیم حساب کنیم $(k'A)$ و $(k'B)$ و... ها هستند پس k را بر حسب کمیت‌های قابل محاسبه مان نوشتیم پس اگر $(k'A)$ ها را تقسیم بر k' کنیم سپس ضرب‌در k کنیم، به ضرایب حقیقی‌ای که می‌خواستیم می‌رسیم. قبلاً هم گفته بودیم که اگر ضرایب بدون پریم اگر در چیزی ضرب شوند، مشابه‌شان ضرایب پریم‌دار هم در همان چیز ضرب می‌شوند. پس اگر $(k'A)$ ها را ضرب‌در $\frac{k}{k'}$ کردیم تا به مقدار واقعی A و B و C و ... برسیم، باید $(k'A')$ ها یا به عبارتی دیگر A'' و B'' و C'' و ....ها را ضرب‌در $\frac{k}{k'}$ کنیم تا مقدار واقعی ضرایب پریم‌دار یعنی A' و B' و C' و ... را بیابیم. در این جا بالأخره کار حل است! با ضرایب واقعی پریم دار از

برای بیضی
$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{2}{A'+B'+C'+\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'-2A'C'-2B'C'+(D'^2+E'^2+F'^2)}} \\ b^2 = \dfrac{2}{A'+B'+C'-\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'-2A'C'-2B'C'+(D'^2+E'^2+F'^2)}} \end{cases}$$

برای سهمی
$$\left\{ p^2 = \dfrac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'-2A'C'-2B'C'+(D'^2+E'^2+F'^2)}} \right.$$

برای هذلولی
$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{2}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'-2A'C'-2B'C'+(D'^2+E'^2+F'^2)}+A'+B'+C'} \\ b^2 = \dfrac{2}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'-2A'C'-2B'C'+(D'^2+E'^2+F'^2)}-(A'+B'+C')} \end{cases}$$

استفاده می‌کنیم و بدین ترتیب مشخصات ذاتی مقطع مخروطیمان را داریم. فقط می‌ماند که مختصات مرکز مقطع مخروطی را هم به دست آوریم. ${x'}_0$ و ${y'}_0$ مختصات مرکز مقطع مخروطی در صفحه‌ی مقطع مخروطی(p) است که قبلاً رابطه‌اش را برای دو بعد به دست آوردیم:

$$y''_0 = \frac{EB-2DC}{4AC-B^2}$$

$$z''_0 = \frac{BD-2AE}{4AC-B^2}$$

ضرایب بدون پریم بالا را هم که به دست آوردیم. اگر یادتان باشد(!) برای این‌که دستگاه مختصات کلی سه بعدی را به دستگاه مختصاتی روی صفحه‌ی p تبدیل کنیم سه کار انجام دادیم، یک انتقالِ مبدأ و دو دوران که رابطه تبدیلش را قبلاً نوشتیم و بار دیگر در این‌جا می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\sin\alpha\sin\theta - (y-y_0)\cos\alpha\sin\theta + z\cos\theta \\ x\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha \\ -x\sin\alpha\cos\theta + (y-y_0)\cos\alpha\cos\theta + z\sin\theta \end{bmatrix}$$

مختصات مرکز مقطع مخروطی را در دستگاه XYZ اصلی با X_0، Y_0، Z_0 نشان می‌دهیم . چون که مقطع مخروطی کاملاً در صفحه p قرار دارد لذا ${x''}_0 = 0$ بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {y''}_0 \\ {z''}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0\sin\alpha\sin\theta - (Y_0-y_0)\cos\alpha\sin\theta + Z_0\cos\theta \\ X_0\cos\alpha + (Y_0-y_0)\sin\alpha \\ -X_0\sin\alpha\cos\theta + (Y_0-y_0)\cos\alpha\cos\theta + Z_0\sin\theta \end{bmatrix}$$

هم می‌توانیم دستگاه سه معادله‌ی بالا را حل کنیم که به ما مختصات مرکز مقطع مخروطی را بدهد و هم می‌توانیم هر عملی که انجام دادیم که از دستگاه اصلی به دستگاه خوابیده روی p رسیدیم را عکس کنیم و ماتریس‌های جدیدی به کار بریم تا از دستگاه خوابیده روی p برسیم به دستگاه مختصات اصلی. این کار را شما در مسئله ۱۶ انجام خواهید داد. به هر صورت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {y''}_0\cos\alpha - {z''}_0\sin\alpha\cos\theta \\ {y''}_0\sin\alpha + {z''}_0\cos\alpha\cos\theta + y_0 \\ {z''}_0\sin\theta \end{bmatrix}$$

می‌توانید نشان دهید با حل دستگاه سه معادله هم به ماتریس بالا می‌رسید. بدین ترتیب همه چیز را در ماتریس سمت راست داریم و مختصات مرکز مقطع مخروطی حاصل می‌شود.

روش‌هایی برای یافتن معادله مقطع مخروطی در دو بعد

مسئله این است که به ما مختصات شش نقطه یا پنج نقطه را در صفحه می‌دهند و از ما مشخصات مقطع مخروطی را می‌خواهند. اگر مشخصات شش نقطه معلوم بود، یک راه ساده‌ای که ممکن است اول به ذهن برسد این است که از

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

استفاده کنیم و xها و yهای نقاط را جایگذاری کنیم و برسیم به شش معادله و شش مجهول و ضرایب را با حل این دستگاه پیدا کنیم. اگر به ما پنج نقطه داده بودند چه؟ باز هم می‌توان کاری کرد. کافیست در صورتی که فرض می‌کنیم $F \neq 0$ ، دو طرف معادله‌ی بالا را تقسیم بر F کنیم آن گاه:

$$\frac{A}{F}x^2 + \frac{B}{F}xy + \frac{C}{F}y^2 + \frac{D}{F}x + \frac{E}{F}y + 1 = 0$$

و ضرایب جدیدمان به صورت بالا هستند و عملاً باید معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + 1 = 0$$

که ضرایب پریم‌دار را باید تعیین کنیم و پنج‌تا هستند. پس از حل کردن دستگاه به همان روشی که گفته شد ضریب مناسبی در کل معادله ضرب می‌کنیم (اگر لازم داشت). و اما راهی غیر از حل دستگاه پنج یا شش معادله هم وجود دارد که شاید البته لزوماً ساده‌تر و غیر زمان‌گیرتر(!) نیست! می‌دانیم که معادله‌ی خطی دل‌خواه در صفحه

$$y = a_1x + b_1$$

است. حال معادله‌ی یک ضرب‌در چیست؟ منظور دو تا خطند که همدیگر را در نقطه‌ای قطع کنند. باید معادله داشته باشیم که هم خط مثلاً یک در آن صدق کند و هم خط دو که در نتیجه تمام نقاط ضرب‌در در آن معادله صدق می‌کند. ساده‌ترین راه ضرب دو معادله خط در یک دیگر است:

$$y - a_1x - b_1 = 0 \quad \text{و} \quad y - a_2x - b_2 = 0$$

$$(y - a_1x - b_1)(y - a_2x - b_2) = 0$$

کارما با ضرب‌در از جایی شروع می‌شود که پنج نقطه دل‌خواه در صفحه داریم (به شماره‌های۱، ۲، ۳، ۴ و ۵)، دو تا از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم(۱و۲) و خطی از آن‌ها عبور می دهیم (L_1)، این می‌شود یک خط از ضرب‌درِمان. دو نقطه‌ی دیگر (که حتماً آن دو نقطه‌ی قبلی نیستند)(۳و۴) انتخاب می‌کنیم و خط دیگری از این دو عبور می‌دهیم (L_2). L_1 و L_2 هم‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و با هم شکل ضرب‌در را تشکیل می‌دهند که معادله‌اش در بالا آمده است. دقت کنید که چون مختصات نقاط معلومند، هر دو شیب و هر دو عرض از مبدأ مشخصند. حال با این چهار نقطه این ضرب‌در را داریم، با همین چهار نقطه یک ضرب‌در دیگر می‌سازیم به این صورت که یکی از خط‌هایش مربوط به دو نقطه‌ی ۱و۳ و یکی از خط‌هایش مربوط به دو نقطه‌ی ۲ و ۴ است. دقت کنید که هنوز نقطه‌ی پنجم به کار نیامده و فعلاً روی چهارتا از نقاط بحث می‌کنیم.این دو خط جدید احتمالاً شیب و عرض از مبدأ متفاوتی دارند با دو خط قبلی:

$$(y - a_3x - b_3)(y - a_4x - b_4) = 0$$

که این، معادله‌ی ضرب‌در جدید است. اشتراک‌های این دو ضرب‌در، چهار نقطه‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند. هدف ما این است که به معادله‌ای برسیم که *فقط* چهار نقطه‌ی مورد نظر را از دو ضرب‌در به عنوان جواب به ما بدهد در حالی که هر یک از دو معادله‌ی

$$\begin{cases} \text{عبارت}1 - \quad (y - a_1x - b_1)(y - a_2x - b_2) = 0 \\ \text{عبارت}2 - \quad (y - a_3x - b_3)(y - a_4x - b_4) = 0 \end{cases}$$

به تنهایی یک مجموعه نقاطی در فضا به نام *ضرب‌در* می‌دهند که چهارتا نقطه‌ی خاصشان آن نقاط مطلوب ماست. ولی ما این را نمی‌خواهیم. معادله‌ای می‌خواهیم که *فقط* چهار نقطه‌ی مطلوب را روی ضرب‌درها بدهند و نه چیز دیگر روی

ضرب‌درها. این‌جاست که باید از اشتراک دو ضرب‌در که *فقط* همان چهار نقطه است استفاده کنیم. آیا معادله‌ی زیر می‌تواند این شرط را برقرار کند؟

$$(y-a_1x-b_1)(y-a_2x-b_2)+(y-a_3x-b_3)(y-a_4x-b_4)=0$$

به ازای نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ هم عبارت۱ و هم عبارت۲ صفر می‌شوند و رابطه بالا برقرار است. تا این‌جا مشکلی نیست. ولی برای بقیه‌ی نقاط چه؟ آن خصوصیتی که می‌خواستیم نقاطی روی ضرب‌درها غیر از این چهارتا در معادله صدق نکنند چه می‌شود؟ خصوصیت معادله بالا همین است. اگر نقطه‌ای غیر از چهار نقطه‌ی مطلوب روی ضرب‌در اولی در نظر بگیریم، عبارت۱ صفر می‌شود ولی عبارت۲ صفر نخواهد شد (چرا که آن نقطه از اشتراک‌ها نیست و روی ضرب‌در دوم نیست) پس معادله بالا صادق نخواهد بود. هم چنین اگر نقطه‌ای روی ضرب‌در دوم در نظر بگیریم عبارت۲ صفر می‌شود ولی عبارت۱ صفر نخواهد شد و باز در معادله‌ی بالا صدق نمی‌کند. به این ترتیب اگر روی ضرب‌درها در نظر بگیریم معادله‌ی بالا فقط به ما چهار نقطه‌ی مطلوبمان را می‌دهد (دقت کنید! به ما چهار نقطه روی ضرب‌در ها را می‌دهد ولی در حالت کلی در صفحه فقط چهارتا نقطه جواب نمی‌دهد چرا که اگر این طور بود به مقطع مخروطی که شامل بی‌نهایت نقطه است نمی‌رسیدیم. در این جا مهم این است که به معادله‌ای برسیم که به ما پنج نقطه‌ی مطلوب را بدهند و بعد هنر کار این است که وقتی به چنین معادله‌ای می‌رسیم، می‌بینیم که معادله‌ی مقطعی مخروطی است که پنج تا از جواب هایش نقاط مطلوبمان هستند). خوبی‌اش این است که همه‌ی شیب و عرض از مبدأها را داریم و یعنی ثوابت مسئله را داریم. برای نقطه پنجم چه کنیم؟ ضریب ثابتی به معادله بالا اضافه می‌کنیم به طوری که به ازای مختصات نقطه پنجم هم معادله بالا صفر شود. یعنی:

$$(y-a_1x-b_1)(y-a_2x-b_2)+\alpha(y-a_3x-b_3)(y-a_4x-b_4)=0$$

یعنی به ازای فقط چهار نقطه‌ی اول، معادله بالا صفر می‌شود (چون هم عبارت۱ هم ۲ صفر می‌شود) و هم‌چنین به ازای نقطه پنجم هم صفر می‌شود (چرا که α را طوری تعیین می‌کنیم که بشود!).

$$\alpha=-\frac{(y_5-a_1x_5-b_1)(y_5-a_2x_5-b_2)}{(y_5-a_3x_5-b_3)(y_5-a_4x_5-b_4)}$$

پس معادله‌ای که در آن تصحیح α را وارد کردیم به ما هر پنج جواب مطلوبمان را می‌دهد. حال، معادله‌ی مقطع مخروطی به ما می‌گوید که معادله‌ای چون

$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+1=0$$

را اگر در نظر بگیریم، در جواب‌های این معادله برای x و y ها، قطعاً x ها و y های پنج نقطه موردنظرمان مشاهده می‌شود چرا که اصلاً کار ما همین بود که ببینیم این نقاط مربوط به چه مقطعی مخروطی هستند. هم‌چنین از راهی دیگر به معادله‌ای رسیدیم که پنج نقطه موردنظرمان را به عنوان جواب می‌دهد. فرض کنید فعلاً یکی از آن پنج نقطه را در نظر می‌گیریم، مثلاً نقطه ۳. از معادله مقطع مخروطی داریم:

$$A'x_3^2 + B'x_3y_3 + C'y_3^2 + D'x_3 + E'y_3 + 1 = 0$$

و از معادله من‌درآوُردی(!) داریم:

$$(y_3 - a_1x_3 - b_1)(y_3 - a_2x_3 - b_2) + \alpha(y_3 - a_3x_3 - b_3)(y_3 - a_4x_3 - b_4) = 0$$

وقتی معادله‌ی بالا را بسط می‌دهیم به چیزی مشابه معادله مقطع مخروطی می‌رسیم که برای نقطه‌ی ۳، معادله مقطع مخروطی واقعی از لحاظ ساختار شبیه معادله‌ی بسط داده شده است. برای چهار نقطه‌ی دیگر هم که این کار را انجام دهیم می‌بینیم که معادله‌ی مقطع مخروطی واقعی شبیه معادله ضرب‌در هاست. چون تعداد نقاطمان نسبتاً زیاد است(۵تا!) و احتمال شانسی هم‌ارز شدن شاید کم می‌شود، نتیجه می‌گیریم که باید ضرایب متناظر با هم برابر باشند. یعنی A' می‌شود ضریب x^2 در معادله ضرب‌درها و B' می‌شود ضریب y^2 و همین‌طور الی‌آخر. پس چون تمام ثوابت در معادله ضرب‌درها را داریم، ضرایب معادله مقطع مخروطی را بدون حل دستگاه معادله پیدا می‌کنیم. وقتی معادله مقطع مخروطی تشکیل شد می‌ماند این که آن آزمایش‌هایی که قبلاً گفته شد روی ضرایب انجام شود تا به اعداد درست a و b برسیم.
به عبارت دیگر، چون می‌دانیم فقط مقطع مخروطی معادله‌ای به شکلِ

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + 1 = 0$$

در صفحه دارد و ما هم به شکل معادله‌ی بالا رسیدیم پس حتماً به یک مقطع مخروطی رسیدیم که آن پنج نقطه روی محیط آن هستند و چون که از هر پنج نقطه فقط یک مقطع مخروطی می‌گذرد، مقطع مخروطی‌ای که با این روش به دست می‌آوریم یکتاست و خودِ تنها جواب است.

۲– مکانیکِ مقاطع مخروطی

در ابتدا باید معادله حرکت کلی یک ذره تحت یک میدان نیروی مرکز را بیابیم. می‌دانیم که شگردهای مختلفی برای این‌کار در کتاب‌های مختلف آورده شده است. یکی از آن‌ها را پیش می‌گیریم: (کتاب مکانیک تحلیلی نوشته فولز)

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{f(r)}{m}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad \left(\text{نیرو مرکزی}\right)$$

بالا فرض کردیم که نیرو مرکزی است(یعنی راستاهای بردار نیرو دائماً به سمت یک نقطه اشاره می‌کنند) و تابع نیرو (f) فقط به فاصله تا مرکز نیرو بستگی دارد. از معادله‌ی دوم داریم:

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \implies \frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt} = 0 \implies h := r^2\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

ثابت تکانه زاویه‌ای بر واحد جرم(چرا؟) را به صورت بالا تعریف کردیم و نامش را گذاشتیمh. از ثابت بودن h می‌توانیم پایسته بودن تکانه زاویه‌ای را برای نیروی مرکزی نشان دهیم. حال متغیر جدیدی به نام u تعریف می‌کنیم به طوری که $u = \frac{1}{r}$. پس:

$$\dot{\theta} = hu^2$$

هم چنین با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = hu^2\frac{dr}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(hu^2\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = hu^2\frac{d}{d\theta}\left(hu^2\frac{dr}{d\theta}\right) = h^2u^2\frac{d}{d\theta}\left(u^2\frac{dr}{d\theta}\right)$$
$$= h^2u^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = -h^2u^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{\left(r^2\dot{\theta}\right)^2}{r^3} = \frac{h^2}{r^3}$$

در نهایت:

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{f(r)}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{f(u)}{mh^2u^2}}$$

معادله‌ی بالا معادله دیفرانسیل حرکت جرم m حول مرکز نیروست. در حالتی که نیرو گرانشی یا کولنی باشد(چیزی که در طبیعت موجود است) می‌دانیم فرم نیرو به صورت عکس مجذور فاصله است یعنی:

$$f(u)=ku^2$$

که در آن k ثابتی است که بسته به فیزیک مسئله می‌تواند متفاوت باشد. با جایگذاری:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u+\frac{k}{mh^2}=0$$

به احتمال خیلی زیاد معادله دیفرانسیل بالا به چشمتان آشنا می‌آید. این همان معادله حرکت نوسانی هماهنگ است یعنی به فرم: $\ddot{x}+\omega^2x=0$ است با این فرق که یک ثابت زیاد دارد. در حالت کلی، حل، می‌شود:

$$\ddot{x}+\omega^2x+a=0 \quad \Longrightarrow \quad x=A\cos(\omega t-\varphi)-\frac{a}{\omega^2}$$

کافیست که جواب بالا را در معادله دیفرانسیل بگذارید و قانع شوید! A و φ به عنوان ثوابت مسئله باید در شرایط اولیه تعیین شوند. در حالت مسئله‌ی ما $\omega=1$ و $a=\frac{k}{mh^2}$. هم‌چنین به جای t باید θ را قرار دهیم. پس:

$$u=A\cos(\theta-\varphi)-\frac{k}{mh^2} \quad \Longrightarrow \quad r=\frac{1}{A\cos(\theta-\varphi)-\frac{k}{mh^2}}$$

چون φ یک ثابت است لذا ما مقدار آن را صفر می‌گیریم و در کلیت مسئله تأثیری ندارد. از طرفی می‌دانیم برای حالت طبیعی k یک عدد منفی است. لذا:

$$r=\frac{\frac{mh^2}{|k|}}{1+\frac{Amh^2}{|k|}\cos\theta}$$

کمینه r وقتی است که $\theta=0$ باشد. کمینه را با r_0 می‌نامیم. هم‌چنین $\frac{Amh^2}{|k|}$ را e می‌نامیم:

$$r_0=\frac{\frac{mh^2}{|k|}}{1+e} \quad \Longrightarrow \quad \frac{mh^2}{|k|}=r_0(1+e)$$

$$r = \frac{r_0(1+e)}{1+e\cos\theta}$$

از طرفی، در ریاضی و هندسه تحلیلی می‌توان نشان داد (چیزی که مطالب گذشته با این فرض گفته شد که آن‌ها را می‌دانستید!!) که فاصله‌ی کانون مقاطع مخروطی با نقطه‌ای روی منحنی‌شان از چنین فرمی پیروی می‌کند. از طرفی می‌دانیم فاصله حضیض (r_0) برای بیضی، سهمی و هذلولی به ترتیب برابر است با؛ $a(1-e)$، p و $a(e-1)$. پس:

$$\begin{cases} r_{\text{بیضی}} = \dfrac{a(1-e)(1+e)}{1+e\cos\theta} = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \\ r_{\text{سهمی}} = \dfrac{p(1+1)}{1+(1)\cos\theta} = \dfrac{2p}{1+\cos\theta} \\ r_{\text{هذلولی}} = \dfrac{a(e-1)(1+e)}{1+e\cos\theta} = \dfrac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta} \end{cases}$$

روابط بالا را احتمالاً به تواتر دیده‌اید.

حال که رابطه‌ی r و θ را یافتیم سؤال پیش می‌آید که ارابطه‌ی بین r و t چیست؟ می‌توانیم با توجه به داشتن رابطه‌ی بین r و θ ، رابطه‌ی بین θ و t را بیابیم و سپس به r ربط دهیم.

مدار بیضی

برای حالت بیضی داریم:

$$h = r^2\dot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad ht = \int r^2 d\theta = a^2(1-e^2)\int \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

انتگرال بالا را چه کنیم؟ ممکن است حل θ برحسب t را دیده باشید که به صورت هندسی حل می‌کنند و به معادله کپلر می‌رسند. ولی به صورت انتگرالی هم می‌شود رسید. به ناچار چون حل انتگرال بالا به نظر مشکل می‌رسد، مجبوریم که ایده را بیان کنیم:

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} \qquad \text{(چرا؟)}$$

$$\int \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$= \int \frac{d\theta}{\left(1+e\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)\right)^2} = 2\int \frac{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^2 d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+e+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= 2\int \frac{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)d\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\left(1+e+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= 2\int \frac{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)d\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+e+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^2} \quad x \coloneqq \tan\frac{\theta}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\int \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = 2\int \frac{(1+x^2)dx}{(1+e+(1-e)x^2)^2} \quad \tan\beta \coloneqq \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, x \quad \Longrightarrow$$

$$\int \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = 2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\int \frac{\left(1+\frac{1+e}{1-e}\tan^2\beta\right)d(\tan\beta)}{(1+e)^2(1+\tan^2\beta)^2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\int \frac{\left(1+\frac{1+e}{1-e}\tan^2\beta\right)d(\tan\beta)}{(1+e)^2(1+\tan^2\beta)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\int (1-e+(1+e)\tan^2\beta)\frac{(1+\tan^2\beta)}{(1+\tan^2\beta)^2}\, d\beta$$

$$= \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{1+\tan^2\beta - e(1-\tan^2\beta)}{(1+\tan^2\beta)}\, d\beta$$

$$= \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\beta - e\int \frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}\, d\beta\right]$$

$$= \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\beta - e\int \cos(2\beta)\, d\beta\right]$$

$$= \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,(2\beta - e\sin(2\beta))$$

اگر فرض کنیم در $t = 0$ ، داریم $\theta = 0$ یعنی جرم در حضیض مداری است برای θ ی دلخواه داریم:

$$ht = a^2(1-e^2)^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

هم چنین در $\theta = 0$ داریم $\beta = 0$ پس:

$$ht = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,(2\beta - e\sin(2\beta)) \implies E \coloneqq 2\beta$$

پس اگر داشته باشیم $\tan\frac{E}{2} \coloneqq \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$ آن‌گاه:

$$E - e\sin E = \frac{ht}{a^2\sqrt{1-e^2}}$$

از طرفی قبلاً ثابت کردیم که:

$$\frac{mh^2}{|k|} = r_0(1+e) = a(1-e^2)$$

در حالت گرانشی می‌دانیم $|k| = GMm$ که در آن M جرم مرکز نیروست. (دقت کنید که در این مسئله‌ی خاص، مرکز نیرو به هیچ وجه متحرک نیست و نقطه‌ای ثابت در فضاست، با مسئله‌ی دوجسم اشتباه نگیرید) پس:

$$h = \sqrt{GMa(1-e^2)} \implies E - e\sin E = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{a^2\sqrt{1-e^2}}t = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}\,t$$

طبق قانون سوم کپلر $\sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{2\pi}{T}$ که در آن T دوره تناوب حرکت مداری است. بالأخره رسیدیم به معادله مشهور کپلر برای بیضی:

$$\boxed{\begin{aligned} E - e\sin E &= \frac{2\pi}{T}t \\ \tan\frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}}$$

θ را *بی‌هنجاری واقعی* (که پارامتری ملموس برای شماست به این صورت که زاویه‌ی بردار مکان با راستای حضیض است) و E را *بی‌هنجاری* خروج از مرکزی می‌نامیم. (که بعداً خواهیم دید از لحاظ هندسی هم مفهوم دارد)

همان‌طور که گفته شد، روابط بالا اثبات‌های هندسی زیبایی دارند که در کتاب‌هایی مثل نجوم کروی هست. ولی حل از طریق انتگرال به ما این کمک را می‌کند که برای هذلولی و سهمی هم حرف برای زدن داشته باشیم.

مدار سهمی

کار در این حالت آسان است چرا که e مقدار مشخص ۱ را دارد:

$$ht = 4p^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = 4p^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2} = 2p^2 \int_0^\theta \sec^4\frac{\theta}{2}\ d\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2p^2 \int_0^\theta \sec^2\frac{\theta}{2}\left(\sec^2\frac{\theta}{2} d\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2p^2 \int_0^\theta \left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right) d\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2p^2(\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2})$$

تمام شد!! به این راحتی، یک بودن خروج از مرکز باعث شد نیاز به پارامتر واسطه‌ای مثل E نداشته باشیم.

مدار هذلولی

باز گویا تنِمان می‌خارد برای غوطه‌ور شدن در معادلات! برای حالت هذلولی تا قسمتی از مسیر مثل بیضی است و از جایی به بعد کار جدیدمان شروع می‌شود:

$$ht = a^2(e^2-1)^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

و:

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = 2\int \frac{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right) d\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\left(1+e+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

در این حالت چون e بزرگ‌تر از یک است و $1-e$ منفی می‌شود و ما مایلیم که با پارامترهای مثبت کار کنیم، لذا:

$$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=2\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)d\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\left(e+1-(e-1)\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^2}\qquad x\coloneqq\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=2\int\frac{(1+x^2)dx}{(e+1-(e-1)x^2)^2}$$

$$\tanh\beta\coloneqq\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\,x$$

$$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=2\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\int\frac{\left(1+\frac{e+1}{e-1}\tanh^2\beta\right)d(\tanh\beta)}{(e+1)^2(1-\tanh^2\beta)^2}$$

در مسئله ۱۰ نشان خواهید داد که:

$$d(\tanh\beta)=\operatorname{sech}^2\beta\;d\beta=(1-\tanh^2\beta)\,d\beta$$

بنابراین:

$$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=\frac{2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\int(e-1+(e+1)\tanh^2\beta)\frac{(1-\tanh^2\beta)}{(1-\tanh^2\beta)^2}\;d\beta$$

$$=\frac{2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{e(1+\tanh^2\beta)-(1-\tanh^2\beta)}{(1-\tan^2\beta)}\;d\beta$$

$$=\frac{2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[e\int\frac{1+\tanh^2\beta}{1-\tanh^2\beta}\;d\beta-\beta\right]$$

$$=\frac{2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[e\int\frac{(\sinh^2\beta+\cosh^2\beta)\operatorname{sech}^2\beta}{\operatorname{sech}^2\beta}\;d\beta-\beta\right]$$

$$=\frac{2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[e\int\left((\cosh^2\beta-1)+\cosh^2\beta\right)d\beta-\beta\right]$$

$$=\frac{2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[e\int(2\cosh^2\beta-1)\;d\beta-\beta\right]$$

$$=\frac{2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[2e\int\cosh^2\beta\;\;d\beta-(1+e)\beta\right]$$

در مسئله ۱۸ اثبات خواهید کرد که:

$$\int \cosh^2\beta \; d\beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\sinh(2\beta)}{4}$$

در نتیجه:

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[e\beta + e\frac{\sinh(2\beta)}{2} - (1+e)\beta\right]$$
$$= \frac{1}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}[e\sinh(2\beta) - 2\beta] \qquad E \coloneqq 2\beta \quad \Longrightarrow$$

$$ht = \frac{a^2(e^2-1)^2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}(e\sinh E - E) \quad \Longrightarrow \quad e\sinh E - E = \frac{ht}{a^2\sqrt{e^2-1}}$$

برای هذلولی داریم:

$$h = \sqrt{GMr_0(1+e)} = \sqrt{GMa(e^2-1)}$$

در نهایت:

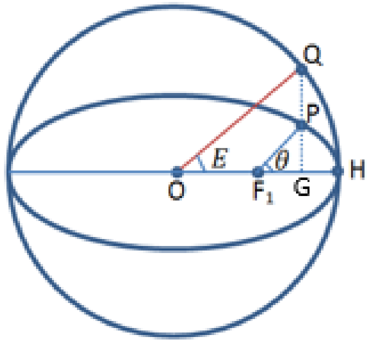
$$\boxed{\begin{aligned} e\sinh E - E &= \sqrt{\frac{GM}{a^3}}t \\ \tanh\frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}}$$

حال معنی فیزیکی $\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ برای هذلولی چیست؟ نمی‌دانم! صرفاً از آن به عنوان زمانی مشخصه استفاده می‌کنیم.

ره‌یافت هندسی معادله کپلر

بیضی

حال با این که ممکن است تکراری باشد، ولی چون آموزنده است و بعداً از قیاس آن استفاده خواهیم کرد، سعی می‌کنیم معادله کپلر بیضی را از راه هندسی می‌یابیم. فرض کنید این شکل را از جیبمان در می‌آوریم(!) و روی آن بحث می‌کنیم:



در مسئله ۱۹ ثابت خواهید کرد که نسبت $\frac{GP}{GQ}$ به ازای تمام نقاط P روی بیضی ثابت خواهد بود. پس می‌توانید P را دقیقاً بالای O روی بیضی و Q را دقیقاً بالا O روی دایره بگیرید و بگویید:

$$\frac{GP}{GQ} = \frac{b}{a}$$

$$GQ = a\sin E \quad \Longrightarrow \quad GP = b\sin E$$

PF_1 را r می‌نامیم مثل همیشه و می‌دانیم که OF_1 برابر ae است. پس:

$$\frac{r\sin\theta}{a\sin E} = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a(1-e^2)\sin\theta}{1+e\cos\theta} = a\sqrt{1-e^2}\sin E \quad \Longrightarrow$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

و از طرفی:

$$a\cos E = r\cos\theta + ae \quad \Longrightarrow \quad \cos E = \frac{(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta} + e = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\tan E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{e+\cos\theta}$$

از آن سو:

$$\tan E = \tan\left(\frac{E}{2}+\frac{E}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{E}{2}}{1-\tan^2\frac{E}{2}}$$

پس:

$$2\tan\frac{E}{2}\ (e+\cos\theta)=\sqrt{1-e^2}\sin\theta\ \left(1-\tan^2\frac{E}{2}\right)$$

هم چنین:

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-1=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

در نتیجه با جایگذاری:

$$2\tan\frac{E}{2}\left(e+\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)=2\sqrt{1-e^2}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\left(1-\tan^2\frac{E}{2}\right)$$

$$\tan\frac{E}{2}\left(1+e-(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{1-e^2}\tan\frac{\theta}{2}\left(1-\tan^2\frac{E}{2}\right)$$

$$\tan^2\frac{E}{2}\left(\sqrt{1-e^2}\tan\frac{\theta}{2}\right)+\tan\frac{E}{2}\left(1+e-(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right)-\sqrt{1-e^2}\tan\frac{\theta}{2}=0$$

اگر معادله درجه دو بالا را حل کنید می‌رسید به:

$$\tan\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

ممکن است بگویید این همه جان کندن برای به دست آوردن فرمولی که راحت‌تر هم می‌شد به دست آورد! درست است. در روشی که به کار بردیم، بعد که سراغ هذلولی می‌آییم می‌توانیم از مقایسه کردن راحت استفاده بریم و به جواب برسیم.

حال بیاییم سراغ معادله کپلر. مساحت‌ها را با S و اندیس خاص خود نشان می‌دهیم. طبق قانون دوم کپلر:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\text{مساحت کل بیضی}}{\text{دوره تناوب}}=\text{ثابت}=\frac{\Delta S}{\Delta t}\implies\frac{S_{F_1PH}}{t}=\frac{\pi ab}{T}$$

S_{F_1PH} را چگونه بیابیم؟ آن را به دو قسمت مثلث F1PG و تکه‌ی PGH تقسیم می‌کنیم. می‌دانیم که چون برای x ثابت، yِ مربوط به بیضی $\frac{b}{a}$ برابر yِ مربوط به دایره است، پس کافی است مساحت تکه‌ی QGH را ضرب‌در $\frac{b}{a}$ بکنیم تا مساحتPGH حاصل شود: (دقت کنید که زوایا را بر حسب رادیان می‌نویسیم)

$$S_{QGH} = \frac{1}{2}a^2E - S_{OQG} = \frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}(a\cos E)(a\sin E) \implies$$

$$S_{PGH} = \frac{b}{a}S_{QGH} = \frac{ab}{2}(E - \sin E\cos E)$$

$$S_{F_1PH} = \frac{1}{2}(a\cos E - ae)(b\sin E) + \frac{ab}{2}(E - \sin E\cos E) = \frac{ab}{2}(E - e\sin E)$$
$$= \frac{\pi ab}{T}t \quad \Longrightarrow \quad E - e\sin E = \frac{2\pi}{T}t \coloneqq M$$

که به معادله کپلر رسیدیم.

دایره کمکی

چیز خاصی نیست! به همان دایره‌ای که در بالا دور بیضی کشیدیم و باعث شد کارمان به واسطه‌ی استفاده از مشخصات این دایره به جای مستقیماً بیضی، راحت‌تر شود، می‌گوییم دایره کمکی. پس فهمیدیم آن تغییر متغیری که در انتگرال به آن رسیدیم، مفهوم هندسی هم دارد.

ولی برای هذلولی چه؟ آیا قادریم مفهومی هندسی برای E در هذلولی بیابیم؟

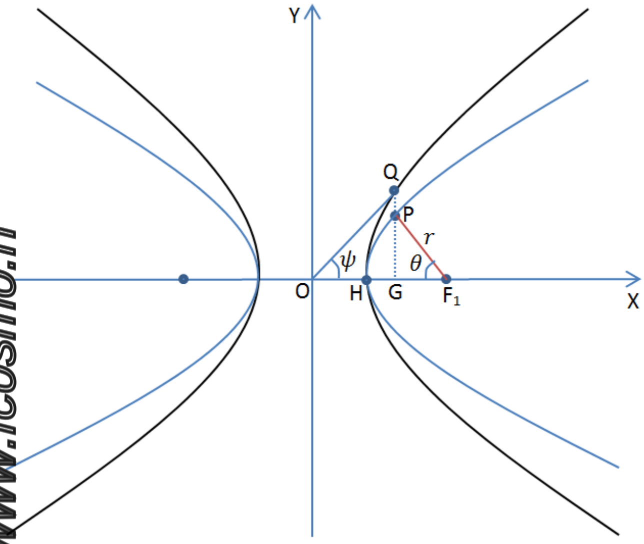
هذلولی

دایره کمکیِ یک بیضی، خود یک بیضی است. بیضی است با $b = a$. وسوسه می‌شویم که هذلولی کمکی (منحنی مشکی رنگ) یک هذلولی (منحنی آبی) را هم تعریف کنیم! به طوری که $b = a$. آیا کار درستی می‌کنیم؟ باید دید. این دفعه مثل قبل نام زاویه نسبت به نقطه مرکز (O) را E نگذاشتیم. در مسئله ۱۹ ثابت خواهید کرد که برای هذلولی هم:

$$\frac{GP}{GQ} = \frac{b}{a}$$

و اما معادله هذلولی کمکی هست:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$



مثل قبل با توابع هایپربولیک کار می‌کنیم. u را به نحوی تعریف می‌کنیم که:

$$x = a\cosh u \quad \text{و} \quad y = a\sinh u$$

که معادله هذلولی بالا هم درست در بیاید. فعلاً کارهایی را که برای بیضی تکرار کردیم، مجدداً برای هذلولی انجام می‌دهیم:

$$QG = \frac{a}{b}\,PG = \frac{a}{b}\,\frac{a(e^2-1)\sin\theta}{1+e\cos\theta} = OG\tan\psi$$

$$= \left(ae - \frac{a(e^2-1)\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)\tan\psi \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{(e^2-1)\sin\theta}{\sqrt{e^2-1}(1+e\cos\theta)} = \tan\psi\left(e - \frac{(e^2-1)\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right) = \tan\psi\left(\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)$$

$$\tan\psi = \frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{e+\cos\theta}$$

مثل قبل. با این تفاوت که به جای $\sqrt{1-e^2}$ داریم $\sqrt{e^2-1}$ که البته منطقی است.(بی‌خود نیست که می‌گوییم بیضی و هذلولی و کلاً مقاطع مخروطی خیلی به هم شبیه‌اند و عملاً انگار از یک جا سرچشمه می‌گیرند). می‌بینیم که آن *جان کندن‌هایی(!)* که قبلاً داشتیم باعث شد برای هذلولی کارمان خیلی راحت شود. حال دقیقاً همان بازی‌هایی که سر بیضی در آوردیم(!) را این‌جا هم داریم تا می‌رسیم به:

$$\tan^2\frac{\psi}{2}\left(\sqrt{e^2-1}\tan\frac{\theta}{2}\right) + \tan\frac{\psi}{2}\left(e+1+(e-1)\tan^2\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{e^2-1}\tan\frac{\theta}{2} = 0$$

متأسفانه رابطه‌ی بالا نتیجه‌ای به تمیزی حالت بیضی نمی‌دهد (امتحان کنید!) خوب، باید چه بکنیم؟ این جاست که باید حدسی هوشمندانه زد! داریم:

$$\frac{y}{x} = \tan\psi = \tanh u$$

دیدیم که ψِ هندسه‌ی دایروی نتوانست ما را به رابطه تمیزِ $\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2}$ برساند ولی از کجا معلوم uِ هندسه‌ی هذلولوی هم نتواند!؟ بسیار خوب، پیش می‌رویم ببینیم به نتایج خوبی می‌رسیم یا نه. در مسئله ۹ شما ثابت می‌کنید که:

$$\tanh u = \frac{2\tanh\frac{u}{2}}{1+\tanh^2\frac{u}{2}}$$

پس:

$$\tanh^2\frac{u}{2}\ (\tanh u) - 2\tanh\frac{u}{2} + \tanh u = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\tanh\frac{u}{2} = \frac{1\pm\sqrt{1-\tanh^2 u}}{\tanh u} = \frac{1\pm\sqrt{1-tan^2\psi}}{\tan\psi}$$

برای این که بفهمیم کدام علامت را انتخاب کنیم کافیست $\tanh\frac{u}{2}$ را در $\psi = 0$ بررسی کنیم. در ψ یا u برابر صفر می‌دانیم که (نشان دهید) باید$\tanh\frac{u}{2}$ برابر صفر باشد. اگر علامت مثبت را انتخاب کنیم صورت صفر نمی‌شود ولی مخرج صفر می‌شود که این یعنی جوابی مخالف صفر. ولی اگر منها را انتخاب کنیم صورت و مخرج صفر می‌شود که لااقل امیدی هست که با رفع ابهام به صفر برسیم!

بااستفاده‌ازرابطه

$$\tan\psi = \frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{e+\cos\theta}$$

داریم:

$$\tanh\frac{u}{2}=\frac{e+\cos\theta-\sqrt{(e+\cos\theta)^2-(e^2-1)\sin^2\theta}}{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}$$
$$=\frac{e+\cos\theta-\sqrt{1+e^2\cos^2\theta+2e\cos\theta}}{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}$$
$$=\frac{e+\cos\theta-(1+e\cos\theta)}{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}=\frac{(e-1)(1-\cos\theta)}{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}$$
$$=\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\left(\frac{1-\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}\right)$$
$$=\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\left(\frac{2\tan^2\frac{\theta}{2}}{2\tan\frac{\theta}{2}}\right)\quad\Longrightarrow\quad\tanh\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2}$$

زیبایی غوطه خوردن در ریاضیات را می‌بینید!؟ به چه نتیجه‌ی مهمی می‌رسیم؟ با قیاس با چیزی که از انتگرال به دست آوردیم، به زیبایی می‌رسیم به:

$$\boxed{E=u=\tanh^{-1}(\tan\psi)}$$

کمی شهودی روی این بحث کنیم. زاویهψ ، زاویه‌ی اندازه‌گیری شده نسبت به مرکز است چه بیضی و چه هذلولی. منتها در بیضی باید از هندسه‌ی خاص خودش یعنی دایروی استفاده کنیم و در هذلولی هم باید از هندسه خاص خودش یعنی هذلولوی استفاده کنیم:

$$E_{\text{بیضی}}=\tan^{-1}(\tan\psi)=\psi$$
$$E_{\text{هذلولی}}=\tanh^{-1}(\tan\psi)$$

ولی در این بین با بیان تفاوت بین هندسه دایروی و هذلولوی، خوب است یکی از شباهت‌های آن‌ها راجع‌به E هم گفته شود. قبلاً گفته شد که مساحت قطاع روبروی ψ در دایره‌ای به شعاع a برابرِ $\frac{1}{2}a^2\psi$ است. اثبات هم کردیم که مساحت قطاع روبروی u به شرطی که از u تعریفی درست داشته باشیم می‌شود $\frac{1}{2}a^2u$. و این‌جا هم ثابت کردیم که$u=$ E در نتیجه:

تعبیر هندسی E در هذلولی و بیضی:

$$E_{\text{بیضی}} = \frac{\text{مساحت قطاع مربوط به دایره کمکی}}{\frac{1}{2}a^2}$$

$$E_{\text{هذلولی}} = \frac{\text{مساحت قطاع مربوط به هذلولی کمکی}}{\frac{1}{2}a^2}$$

حال ببینیم آیا می‌توان از راه هندسی به معادله زاویه – زمان رسید. مشابه قبل عمل می‌کنیم:

$$QG = a\sinh u = a\sinh E \quad \text{و} \quad OG = a\cosh E$$

$$PG = b\sinh E$$

$$S_{QHG} = S_{OQG} - S_{OQH} = \frac{1}{2}a^2\sinh E\cosh E - \frac{1}{2}a^2E$$

$$S_{PHG} = \frac{b}{a}\,S_{QHG} = \frac{1}{2}ab(\sinh E\cosh E - E)$$

$$\begin{aligned} S_{F_1PH} = S_{F_1PG} + S_{PHG} &= \frac{1}{2}ab(\sinh E\cosh E - E) + \frac{1}{2}PG\times(ae - OG) \\ &= \frac{1}{2}ab(\sinh E\cosh E - E) + \frac{1}{2}ab\sinh E\,(e - \cosh E) \\ &= \frac{ab}{2}(e\sinh E - E) \end{aligned}$$

طبق قانون دوم کپلر:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{h}{2} = \text{ثابت} \qquad h = r^2\dot{\theta} = \sqrt{GMa(e^2-1)}$$

اگر مجدداً در $t=0$ فرض کنیم $\theta = 0$:

$$\frac{S_{F_1PH}}{t} = \frac{\frac{ab}{2}(e\sinh E - E)}{t} = \frac{\sqrt{GMa(e^2-1)}}{2} \implies$$

$$e\sinh E - E = \frac{\sqrt{GMa(e^2-1)}}{a^2\sqrt{e^2-1}}t \implies e\sinh E - E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}\,t$$

رابطه‌ی بالا آشنا نیست؟ همان‌طور که گفته شد $\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ در بیضی معادل $\frac{2\pi}{T}$ است که T دوره تناوب حرکت است ولی در هذلولی گویا خیلی معنی فیزیکی نتوانیم پیدا کنیم و آن را فعلاً زمانی مشخصه در نظر می‌گیریم.

روش‌هایی برای حل معادله کپلر

برای حل معادله کپلر در حالت مدار بیضی روش‌های گوناگونی وجود دارد که خواننده را برای آشنایی بیشتر با این روش‌ها به مقاله نسبتاً مفصل "معادله کپلر" آقای علی ایزدی‌راد ارجاع می‌دهیم. ولی فعلاً قصد ما بررسی تفصیلی موضوع نیست و به روش‌هایی ساده اکتفا می‌کنیم.

جا نشانی‌های پی‌درپی

یک راه خیلی ساده برای حل معادله‌ی

$$E - e\sin E \coloneqq M$$

این است که در اول عددی برای E انتخاب کنیم و مقدار

$$e\sin E + M$$

را حساب کنیم و این دفعه عدد جدیدی که به دست آوردیم را به جای E بگذاریم و باز همین فرآیند را تکرار کنیم در نهایت به حسب دقت ماشین حساب ما به عدد ثابتی برای E برسیم که هر چه فرآیند بالا را برایش تکرار می‌کنیم تغییری نمی‌کند. این کار را می‌توانید با دکمه‌ی(=) ماشین حسابتان انجام دهید. یعنی چیزی که به ماشین حساب وارد می‌کنید به فرمِ

$$e\sin(Ans) + M$$

است، بعد که مرتب دکمه‌ی (=) را بزنیم می‌توانیم به جواب برسیم. (جایی که جواب‌های که ماشین حساب به ما می‌دهد به یک عدد مشخص همگرا می‌شود و دیگر لازم نباشد دکمه (=) را بزنیم، آن همان جواب احتمالی ماست چون که ممکن است جواب‌های دیگری هم داشته باشد و ما جواب اشتباه را پیدا کرده باشیم!)

حال مسئله این است که آیا روش بالا همیشه جواب می‌دهد؟ اصلاً با این که روش منطقی به نظر می‌رسد، ولی چرا جواب می‌دهد؟ بسیار خوب، در حالت کلی فرض می‌کنیم که می‌خواهیم معادله زیر را حل کنیم:

$$x = f(x)$$

فرض می‌کنیم لااقل یک ریشه‌ی معادله‌ی بالا x_0 باشد. فرض می‌کنیم که به مقدار خیلی کوچکی از x_0 فاصله می گیریم و می‌بینیم که آیا به شرایط پایداری می‌رسیم یا خیر. یعنی همگرا شدن را به این معنی تلقی می‌کنیم که تابع باز از آن نقطه‌ی انحراف یافته به سمت نقطه‌ی اصلی یعنی x_0 باز می‌گردد و آخر اگر از هر نقطه‌ای نزدیک ریشه کار را شروع کنیم، به x_0 برسیم (همگرا به جواب خاص شود) با دانستن

$$x_0 = f(x_0)$$

به اندازه δ تابع را از مکان ریشه منحرف می‌کنیم:

$$f(x_0+\delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0)$$

طبق روش گفته شده:

$$f\big(f(x_0+\delta)\big) = f\big(f(x_0)+\delta f'(x_0)\big) = f\big(x_0+\delta f'(x_0)\big) = x_0 + \delta(f'(x_0))^2$$

اگر این کار را بار دیگر تکرار کنیم:

$$f(x_0+\delta(f'(x_0))^2) = x_0 + \delta(f'(x_0))^3$$

و اگر هر چه بیشتر تکرار کنیم:

$$f(x_0+\delta(f'(x_0))^n) = x_0 + \delta(f'(x_0))^{n+1}$$

همین جا می‌توانیم شرطی پیدا کنیم که اگر این شرط برقرار باشد روش ذکر شده می‌تواند ما را به جواب برساند و اگر برقرار نباشد، خیر؛ اگر

$$|f'(x_0)| < 1$$

باشد در تعداد دفعات تکرار زیاد $(f'(x_0))^n$ به صفر میل می‌کند جوابِ ما به ریشه‌ی x_0 مرتب نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و این یعنی همان هم‌گرایی. پس برای همگرایی باید شرط بالا برقرار باشد و اگر برقرار نباشد با دفعات تکرار روش ذکر شده مدام از ریشه واقعی دور می‌شویم (شاید هم بیفتیم داخل ریشه‌ای دیگر که این خطرناک است!) پس اگر خواستیم از این روش استفاده کنیم خوب است که قبل از آن این شرط را چک کنیم. اگر شک دارید این که ما از مرتبه دو به بالاتر صرف‌نظر کردیم کار درستی است یا خیر، شما را به مسئله ۲۴ ارجاع می‌دهیم.

روش هندسی

و اما روش دیگر که شاید بیشتر هندسی و با روی‌کرد عملی و محاسباتی بیشتری باشد این است که دو طرف معادله‌ی

$$E = e\sin E + M$$

را جدا رسم کنیم. یعنی متغیر مستقل خود را E فرض کنیم و یک بار تابع

$$y = E$$

را رسم کنیم و در همان نمودار بار دیگر تابع

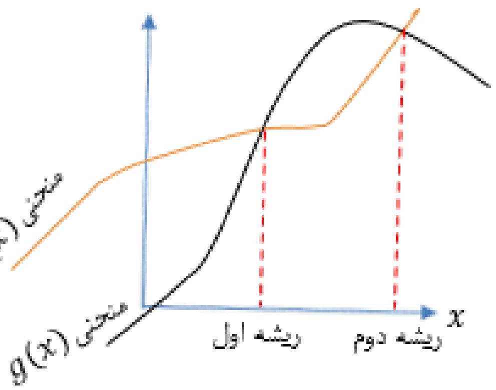
$$y = e\sin E + M$$

را رسم کنیم و ببینیم هر جا این دو تابع همدیگر را قطع کردند، آن جاها ریشه‌های ماست.

در حالت کلی اگر بخواهیم ریشه‌ی

$$f(x) = g(x)$$

را بیابیم به روایت تصویر روبرو عمل می‌کنیم.



برای مشاهده روش‌های بیشتر که اگر گاهی یک روش خوب جواب نداد از روشهای دیگر استفاده کنیم، به مقاله آقای علی ایزدی‌راد مراجعه کنید.

*نگاه به مقاطع مخروطی در فضای مختلط

در این قسمت قصد داریم کمی بیشتر به دیدگاه وحدت مقاطع مخروطی نزدیک شویم و به اصطلاح تیر آخر خود را در حیطه‌ی وحدت مقاطع مخروطی بزنیم! قبل از آن باید مقداری مقدمات را بررسی کرد که اثبات ریاضی‌شان در کتب مختلف هست و خواننده می‌تواند از آن‌جا پی‌گیر شود.

بسط تیلور

بسیاری از توابع ریاضی خوش‌رفتار را می‌توان بسطی به نام بسط تیلور داد که در خیلی مواقع این بسط به کمکمان می‌آید. فرم کلی بسط به صورت زیر است:

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

ما فعلاً قصد داریم از بسط بالا کمی در کار خود استفاده کنیم و قصد توضیح تفصیلی خود بسط را نداریم. همان طور که در مسئله ۳۱ نشان می‌دهید:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

دقت کنید که بالا باید زوایا را به رادیان حساب کنید. حال چیزی را به نام i معرفی می‌کنیم که قرار نیست خیلی مفهوم فیزیکی و قابل لمسی داشته باشد ولی بسیاری از مواقع کار ریاضی‌مان را به شدت راحت می‌کند.

$$i \coloneqq \sqrt{-1}$$

با این وصف، توان‌های زوج i ، به شرطی که توان بر ۴ بخش‌پذیر باشد، عددی مثبت می‌شوند و در غیر این صورت عددی منفی می‌شوند. هم چنین در توان‌های فرد i، اگر توان را منهای یک کنیم، حاصل عددی بخش‌پذیر بر چهار شد، i به توان آن توانِ فرد می‌شود $+i$ و در غیر این‌صورت، $-i$. بدین ترتیب:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

و به رابطه *اویلر* می‌رسیم:

$$\boxed{\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}}$$

روابط بالا خیلی مفیدند! در واقع $e^{i\theta}$ عددی *مختلط* است چرا که اگر سمت راست تساوی را نگاه کنید، هم قسمت حقیقی ($\cos\theta$) می‌بینید و هم قسمتی می‌بینید که در i ضرب شده است($\sin\theta$) که نام این را، قسمت *موهومی* می‌گذاریم. پس به یک تعبیری، خودِ i هم عددی است موهومی. در حالت کلی به عددی به صورتِ

$$p = a + ib$$

عددی مختلط گوییم. یعنی p عدد مختلطی است که a قسمت حقیقی آن و b قسمت موهومی آن است. با نمایشی علمی‌تر:

$$\mathrm{Re}(p) = a \quad \text{و} \quad \mathrm{Im}(p) = b$$

ولی بحث قرار نیست خیلی روی این‌ها بگذرد و صرفاً برای آشنایی آورده شده‌اند. کاری که ما با اعداد مختلط داریم این است که می‌خواهیم با استفاده از این‌ها به اتحادی زیبا بین معادلات بیضی و هذلولی برسیم. می‌توانید با استفاده از روابط اویلر به سادگی نشان دهید:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{و} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

هم چنین واضح است که:

$$\frac{1}{i} = -i$$

فعلاً فرض کار ما این است:

فرض: در دستگاه مختصاتی که در حالت بیضی داریم، هر نقطه یک x و y ای دارد. فعلاً مؤلفه‌ی x شان را دست نمی‌زنیم ولی مؤلفه‌ی y هر نقطه را i برابر می‌کنیم.

باید ببینیم با کاری که ما روی نقاط انجام می‌دهیم در معادلاتمان چه تغییری حاصل می‌شود. طبق فرض بالا ما هر جا y دیدیم در معادلات، باید آن را به iy تبدیل کنیم. به عبارتی دیگر شکل‌های ما در مختصاتی نیست که هر دو محور حقیقی‌اند بلکه به صورتی می‌شود که محور افقی، درجه بندی‌اش حقیقی است به این معنی که اگر مثلاً روی محور X عدد چهار را خواندیم، یعنی در معادلات و در همه جا به جای آن مؤلفه‌ی خاصِ x، چهار را می‌گذاریم. ولی اگر روی محور Y مثلا با خط‌کش عدد چهار را خواندیم، طول عمودی چهار است ولی در معادلات باید به جای آن $4i$ بگذاریم و این‌ها یک *تعریف بندی* جدید است.

دقت کنید که ما فقط محور عمودی را دست کاری کردیم و بنابراین a و e که دو پارامتری‌اند که در راستای محور افقی تعریف می‌شوند، ضرب در i نمی‌شوند. معادله‌ی یک بیضی در دستگاه مختصات جدید می‌شود:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{(iy)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

و می رسیم به معادله هذلولی. ممکن است بگویید ما که همهی y ها را ضرب‌در i کردیم پس باید b هم ضرب‌در i شود. ولی دقت کنید که ما در این‌جا b را به عنوان یک طول در راستای محور عمودی در نظر نمی‌گیریم و b^2 را به عنوان عددی حقیقی در نظر می گیریم و فعلاً این‌جور تصور می‌کنیم که شهودی نداریم که b در راستای y است. حال ببینیم با این تغییر چه بلایی سرِ زوایا می‌آید:

اگر برای یک بیضی، یک دایره کمکی رسم کنیم و نقطه‌ای به طول x را در نظر بگیریم روی محیط بیضی، اگر این نقطه را روی دایره کمکی به صورت عمودی تصویر کنیم، نقطه‌ی جدیدی حاصل می‌شود که xاش با قبلی یکسان ولی yاش متفاوت می‌شود. مؤلفه‌ی عمودی نقطه‌ی اولیه را y می‌نامیم و مؤلفه‌ی عمودی نقطه‌ی جدید را که روی محیط دایره کمکی است را Y می‌نامیم. قبلاً بیان کردیم که برای نقاط مختلف روی بیضی:

$$\frac{Y}{y} = cte.$$

هم چنین:

$$\tan E = \frac{Y}{x}$$

حال قرار شده است که همه‌ی مؤلفه عمودی‌ها را ضرب‌در i بکنیم. دو طرف رابطه بالا را اگر در i ضرب کنیم که اشکالی در تساوی درست نمی‌کند:

$$i \tan E = \frac{iY}{x}$$

حال سمت راست مثل این است که yها را ضرب‌در i کرده‌ایم. در مسئله ۳۰ نشان می‌دهید که رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\tanh(iE) = i \tan E$$

پس

$$\tanh(iE) = \frac{iY}{x}$$

به عبارت دیگر داریم به مشابهت‌هایی بین هذلولی و بیضی می‌رسیم. تانژانت به هندسه هذلولوی نوشته شد و زاویه ضرب‌در i شد. یعنی ضرب‌در i مؤلفه‌های عمودی باعث شد زوایایی که یک ضلعشان در راستای X است ضرب‌در i شوند و توابع ما از توابع مثلثاتی تبدیل به هذلولوی شود. ممکن است بگویید صرفاً یک رابطه شاید نتواند به ما قاعده‌ی کلی بدهد.بله، درست است! بعداً نشان می‌دهیم که به صورت کمی کلی‌تر برای توابع غیر از تانژانت هم می‌توان این را گفت، ولی قبول است. شاید نتوانیم قاعده‌ای کلی در بیاوریم ولی لااقل می‌توانیم از مشابهت‌هایی که می‌بینیم استفاده کنیم. در معادله کپلر برای بیضی می‌دانیم که:

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} t$$

در واقع 2π خودش یک زاویه بوده است و بنابراین اگر بخواهیم این دید را داشته باشیم که با ضرب‌در i کردن ما از بیضی به هذلولی می‌رسیم (نگاه تبدیلی) و گفتیم که زوایا ضرب در i می‌شوند، پس به جای 2π داریم $2\pi i$. بدین ترتیب:

$$E - e\sin E = \frac{2\pi}{T}t \quad \rightarrow \quad iE - e\sinh iE = \frac{2\pi i}{T}t$$

همان طور که در بالا می‌بینید، هم زوایا در i ضرب شده‌اند و هم هندسه عوض شده است. حال T را داخل کار می‌آوریم. a نیم‌قطر بزرگ بیضی است در فضای حقیقی:

$$iE - e\sinh iE = \frac{2\pi i}{\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{a^3}}}}t$$

حال اول i را می‌بریم در مخرج سپس می‌بریم در رادیکال:

$$iE - e\sinh iE = i\sqrt{\frac{GM}{a^3}}t = -\frac{1}{i}\sqrt{\frac{GM}{a^3}}t = -\sqrt{\frac{GM}{-a^3}}t = -\sqrt{\frac{GM}{(-a)^3}}t$$

نام $-a$ را می‌گذاریم a'. پس:

$$e\sinh iE - iE = \sqrt{\frac{GM}{a'^3}}t$$

معادله بالا همان معادله‌ای است که برای هذلولی به دست آوردیم. اشتباه نکنید! iE که عددی موهومی است را با E که قبلاً با انتگرال به دست آوردیم باید به فرم:

$$e\sinh E - E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}t$$

باشد مقایسه نکنید و بعد نتیجه بگیرید چرا جواب‌ها یکی نشد. مسئله این است که در حالتی برای معادله هذلولی به دست آوردیم باید زاویه‌ها حقیقی باشند، واقعاً یک هذلولیِ فیزیکی در کار بود! می‌شد لمسش کرد! ولی الآن که زاویه‌ها موهومی شدند یعنی در یک فضایی که نمی‌دانیم چیست(!) یک هذلولی تشکیل شده است. یعنی در عین این که یک جسم دارد دور بیضی می‌گردد، آن جسم در فضای موهومی دارد در مدار هذلولی حرکت می‌کند. قرار نیست حتماً معنی فیزیکی‌ای برای این پیدا کنیم. ما صرفاً این جا خواستیم شباهت منطقی معادلات را بررسی کنیم.

به نتیجه‌ی جالبی که اینجا رسیدیم این بود که a' شد منفیِ a! باز ایراد نگیرید که مگر می‌شود طول منفی شود!؟ در این جا ما با کار ریاضی‌ای که کردیم، طول در فضای موهومی منفی شد. این ابزار ریاضی بعداً به ما کمک می‌کند. و اما اگر بر عکس عمل کنیم، از هذلولی بخواهیم بیضی برسیم هم می‌شود. یعنی در واقعیت یک هذلولی داریم پس:

$$e\sinh E - E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}t$$

گفتیم که از محیط حقیقی بخواهیم به محیط موهومی برویم باید زاویه‌ها را ضرب‌در i بکنیم و هندسه را عوض کنیم:

$$e\sin(iE) - iE = i\sqrt{\frac{GM}{a^3}}t = -\frac{1}{i}\sqrt{\frac{GM}{a^3}}t = -\sqrt{\frac{GM}{a'^3}}t$$

$$iE - e\sin iE = \sqrt{\frac{GM}{a'^3}}t$$

این دفعه a' که طولی منفی است در فضای موهومی مر بوط به بیضیِ موهومی شد، نه هذلولی.

قبلاً گفته بودیم که مثال‌های دیگری می‌زنیم از این که زوایا باید در i ضرب شوند. فرض کنید مبدأ مختصات را روی کانون بیضی گذاشته‌ایم:

$$x = r\cos\theta = \frac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta} \quad \text{و} \quad y = \frac{a(1-e^2)\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

حال تبدیلات را انجام می‌دهیم. در هذلولی موهومی:

$$x' = x \quad \text{و} \quad y' = iy$$

$$x' = \frac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta} \quad \text{و} \quad y' = \frac{a(1-e^2)i\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

می‌توانید به سادگی نشان دهید که:

$$\cos\theta = \cosh i\theta \quad \text{و} \quad i\sin\theta = \sinh i\theta$$

یعنی:

$$x' = \frac{a(1-e^2)\cosh i\theta}{1+e\cosh i\theta} \quad \text{و} \quad y' = \frac{a(1-e^2)\sinh i\theta}{1+e\cosh i\theta}$$

رابطه بالا چیست!؟ آیا جز همین است که ما برای هر زاویه دلخواه (نه لزوماً E) برای تبدیل به فضای موهومی، زاویه را در i ضرب کردیم و هندسه را هذلولوی کردیم؟ می‌بینیم که باز توانستیم با استفاده از همان فرض اولیه‌ای که کردیم به قاعده قبلی برسیم. البته ممکن است مثال نقضی پیدا شود ولی ما تا جایی که فعلاً با این‌ها کار داریم برایمان جواب می دهد. در روابط بالا a مربوط به بیضی حقیقی است ولی ما الآن هذلولی داریم پس باید طول مشخصه هذلولی هم به معادلات وارد کنیم: $(a' = -a)$

$$x' = \frac{a'(e^2-1)\cosh i\theta}{1+e\cosh i\theta} \quad \text{و} \quad y' = \frac{a'(e^2-1)\sinh i\theta}{1+e\cosh i\theta}$$

حال اگر بخواهیم طول بردار مکان را در فضای موهومی حساب کنیم، می‌دانیم که طول بردار مکان در فضای حقیقی می‌شد:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

به سادگی از لحاظ جبری داریم:

$$r = \sqrt{x^2-(iy)^2}$$

با استفاده از تبدیلاتمان، همین بردار مکان در فضای حقیقی به صورت زیر در فضای موهومی نوشته می‌شود:

$$r = \sqrt{x'^2-y'^2} = \frac{a'(e^2-1)}{1+e\cosh i\theta}\sqrt{\cosh^2 i\theta - \sinh^2 i\theta} = \frac{a'(e^2-1)}{1+e\cos\theta}$$

رسیدیم به معادله قطبی هذلولی. یعنی طول یک بردار مکان برای یک بیضی در فضای حقیقی می‌شود طول بردار مکان برای هذلولی در فضای موهومی.

همین‌طور می‌توانیم برویم جلو و به روابط دیگری برسیم. مثلاً:

$$b^2 = a^2(1-e^2) = -a'^2(e^2-1) \quad \Longrightarrow \quad b' \coloneqq ia'\sqrt{e^2-1}$$

از رابطه‌ی بیضی رسیدیم به رابطه برای هذلولی. عبارت سمت راست فرم b هذلولی است ولی در i ضرب شده، چون هذلولی در فضای موهومی ساخته شده است یعنی چون که در فضای موهومی، محور عمودی یعنی i ضرب‌در هر عدد حقیقی شده است پس اگز طولی را از روی محور عمودی در فضای موهومی بخوانیم، مقدار حقیقی آن را حساب کردیم و اگر در i ضرب کنیم، آن عدد را در فضای موهومی خوانده‌ایم. دقت کنید که این ایراد این‌جا وارد نیست که " در اول کار گفتیم b ضرب در i نمی‌شود ولی در این‌جا ضرب شد!" باید دقت کنید که فقط i ضرب نشد بلکه جای e^2 هم تغییر کرد و این باعث شد که:

$$b^2 = b'^2$$

اگر احساس می‌کنید این بحث‌ها کمی نامفهوم است صرفاً به کارمان نگاهی ریاضی بکنید برای تبدیل کردن‌های بیضی و هذلولی.

و اما این که بگوییم مؤلفه‌های عمودی را در i ضرب می‌کنیم شاید این فکر را القا کند که بیضی و هذلولی واقعاً یکی نیستند و باید در یک چیزی ضرب شوند تا به هم تبدیل شوند. ولی می‌توان گفت که کارهایی که ما کردیم عملاً بازی ریاضی بود و عملاً یک معادله واحد را داریم به دو صورت می‌نویسیم و بعد برایش سعی کرده‌ایم شهودی در فضای موهومی پیدا کنیم. در معادله کپلر:

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} t$$

بدون این که بخواهیم شهودی را بیان کنیم دو طرف معادله را در i ضرب می‌کنیم:

$$iE - ei \sin E = \frac{2\pi i}{T} t$$

بعد همان طور که در قبل ادامه دادیم، می‌رویم جلو تا به نتایج مطلوبمان برسیم. همین طور می‌توان این را برای بردار مکان گفت (در واقع در قسمت توضیح بردار مکان اول این توضیح را گفتیم) می‌توانیم به جای این که شهود دهیم که زوایا در i ضرب می‌شوند و هندسه عوض می‌شود صرفاً کاری ریاضی انجام دهیم و دو طرف رابطه را در i ضرب کنیم و سعی کنیم دنبال شهودی برایش بگردیم! اشکال که ندارد!؟:

$$x = r\cos\theta = \frac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta} \quad \text{و} \quad y = \frac{a(1-e^2)\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

دو طرف معادله سمت راست را در i ضرب می‌کنیم و معادله سمت چپ را کاری نداریم (و شهودش این است که به این منزله می‌گیریم که محور X را موهومی نمی‌کنیم):

$$x = \frac{a(1-e^2)\cosh i\theta}{1+e\cosh i\theta} \quad \text{و} \quad iy = \frac{a(1-e^2)\sinh i\theta}{1+e\cosh i\theta}$$

بعد می‌توانیم نام این کارها را بگذاریم: زاویه را در i ضرب کردن و هندسه را هذلولوی کردن!

اگر به صفحه قبل دقت کنید می‌بینید که برای طول بردار مکان هم عملاً همین کار را کردیم و با یک تعریف کمی بازی ریاضی کردیم و آن را بردیم در فضای موهومی و به عنوان کاری ریاضی همیشه طرفین تساوی‌هایمان با هم برابر بوده و مثلاً لازم نبوده دیگر یک r' هم تعریف کنیم و فقط با r کار کردیم.

در مجموع بیشتر قصد داشتیم که از نگاه ریاضی شباهت این دو مقطع مخروطی را بررسی کنیم، شاید خیلی کاری به شهود موضوع نداشته باشیم. در محاسبات کارمان را راحت می‌کند، گرچه سعی کردیم تا حدودی، شهود هم ارائه کنیم.

استخراج معادله زمان سهمی از معادله کپلرِ بیضی!

در قسمت قبل نشان دادیم که بیضی و هذلولی بسیار با هم وحدت دارند و تا آن جا که پیش رفتیم و نشان دادیم معادلاتشان از هم‌دیگر در می‌آیند، یعنی هم از لحاظ هندسی به هم مربوط می‌شوند و هم از لحاظ دینامیکی، معادله کپلرشان هم‌دیگر را نتیجه می‌دهد. یک کار باقی می‌ماند. قبلاً شباهت هندسی سهمی و بیضی را نشان دادیم ولی حرفی از معادله کپلر نزدیم. در این بخش می‌خواهیم اثبات کنیم معادله زمان بیضی و سهمی به مربوطند. در نگاه اول برای خروج از مرکزهای نزدیکِ یک، معادله‌ی

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

این طور می‌نماید که E صفر می‌شود و معادله کپلر برابر صفر می‌شود و انگار دستمان بسته است. ولی دقت کنید که ما اعداد را در معادلات جایگذاری نمی‌کنیم، بلکه مثل قبل از شیوه‌ی حدگیری و میل دادن استفاده می‌کنیم. با استفاده از بسط تیلور می‌توانید به راحتی نشان دهید:

$$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

تعریف می‌کنیم:

$$\beta \coloneqq 1 - e$$

چون که قرار است e به یک میل کند پس کمیت تعریفی چیز کوچکی می‌شود و می‌توانیم در تقریب‌ها از آن استفاده کنیم. داریم:

$$E = 2\left(\sqrt{\frac{\beta}{2-\beta}}\tan\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3}\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{(2-\beta)^{\frac{3}{2}}}\tan^3\frac{\theta}{2} + \cdots\right)$$

بنا به دلیلی که بعداً روشن خواهد شد β تا مرتبه $\frac{3}{2}$ نگه می‌داریم و از مرتبه‌های بالاتر چشم می‌پوشیم. در نتیجه با استفاده از بسط دو جمله‌ای (مسئله ۳۲):

$$E \approx 2\sqrt{\frac{\beta}{2}}\left(1+\frac{\beta}{4}\right)\tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{3}\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

$$=\sqrt{2}\,\sqrt{\beta}\tan\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{4}\tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{3}\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

حال با توجه به این نکته که β را تا مرتبه $\frac{3}{2}$ نگه می‌داریم، از E سینوس می‌گیریم:

$$\sin E \approx \sin\left(\sqrt{2}\,\sqrt{\beta}\tan\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{4}\tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{3}\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\,\sqrt{\beta}\tan\frac{\theta}{2}-\frac{2^{\frac{3}{2}}}{6}\beta^{\frac{3}{2}}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)(1)$$

$$+(1)\left(\sqrt{2}\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{4}\tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{3}\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)=E-\frac{\sqrt{2}}{3}\beta^{\frac{3}{2}}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

و اما در معادله کپلر $e\sin E$ داریم: (تا مرتبه $\frac{3}{2}$ β)

$$e\sin E=(1-\beta)\sin E \approx E-\frac{\sqrt{2}}{3}\beta^{\frac{3}{2}}\tan^3\frac{\theta}{2}-\beta E$$

پس با این تقریب:

$$E-e\sin E \approx \frac{\sqrt{2}}{3}\beta^{\frac{3}{2}}\tan^3\frac{\theta}{2}+\beta E \approx \frac{\sqrt{2}}{3}\beta^{\frac{3}{2}}\tan^3\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\,\beta^{\frac{3}{2}}\tan\frac{\theta}{2}$$

حال آن طرف تساوی معادله کپلر را حساب کنیم. از قانون دوم کپلر می‌دانیم:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\pi ab}{T}=\frac{h}{2}$$

که h را قبلاً در قسمت مکانیک تعریف کردیم تکانه زاویه‌ای بر واحد جرم. پس طرف راست معادله کپلر می‌شود:

$$\frac{2\pi}{T}t=\frac{ht}{ab}=\frac{ht}{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+e}\sqrt{a(1-e)}}$$

پس معادله کپلر ما می‌شود:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\beta^{\frac{3}{2}}\tan^3\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\,\beta^{\frac{3}{2}}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{ht}{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+e}\sqrt{a\beta}}$$

حال به حدگیری می‌رسیم. قبلاً استدلال کردیم که در حد بیضی میل به سهمی:

$$a(1-e)=a\beta=p$$

پس:

$$\sqrt{a\beta}(a\beta)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{2}\,\tan\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)=\frac{ht}{\sqrt{1+e}}\implies$$

$$ht=2p^2\left(\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)$$

که قبلاً دیدیم معادله بالا، معادله زمان سهمی است. حال بر می‌گردیم به اول کار که گفتیم β را فقط تا مرتبه $\frac{3}{2}$ نگه می‌داریم. علتش این است که اگر مرتبه‌های بالاتر را نیز در نظر می‌گرفتیم به طوری که معادله‌مان مثلاً به این صورت شود

$$E-e\sin E\approx\frac{\sqrt{2}}{3}\beta^{\frac{3}{2}}\tan^3\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\,\beta^{\frac{3}{2}}\tan\frac{\theta}{2}+\beta^{\frac{5}{2}}(\dots)+\beta^{\frac{7}{2}}(\dots)+\cdots$$

آن گاه وقتی $a^{\frac{3}{2}}$ در این معادله ضرب می‌شود غیر از جملات قبلی، جملاتی مثل

$$a^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{5}{2}}(\dots)+a^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{7}{2}}(\dots)+\cdots$$

داشتیم که تا مرتبه $\frac{3}{2}$ β به ما p را نتیجه می‌داد و بقیه مرتبه‌ی β صفر می‌شد.یعنی:

$$a^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{5}{2}}=\left(a^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}\right)(\beta)=p^{\frac{3}{2}}\,(0)=0$$

و بدین ترتیب همه‌ی مرتبه‌های بالاتر از $\frac{3}{2}$ به ما صفر را نتیجه می‌دهند و این یعنی معادله‌ای که با تقریب به دست آوردیم، معادله‌ای دقیق است نه تقریبی! چرا که وقتی بقیه مرتبه‌هایی که در تقریب نیامدند همگی صفرند یعنی یک معادله را دقیق حل کردیم. باز هم یکی دگر از شباهت‌های مقاطع مخروطی را دیدیم. قبلاً اثبات کردیم هندسه‌ی سهمی و بیضی یکیست و در این جا یکی بودن دینامیکشان را هم نشان دادیم.

مسائل

قبل از هر چیز، اگر تا حالا روابط گفته شده در قسمت پیش‌نیاز را اثبات نکرده‌اید، حتماً این کار را انجام دهید. هم چنین برای گرفتن کمک می‌توانید از کتبی که قسمتی را لااقل به عنوان مقاطع مخروطی اختصاص داده‌اند یا کتاب هندسه تحلیلی سال چهارم دبیرستان، استفاده کنید.

۱- با استفاده از دو روش دکارتی و قطبی، نصف زاویه‌ی بین دو مجانب هذلولی را بیابید.

راهنمایی: در روش دکارتی با نزدیک شدن هذلولی به مجانبش، چه چیزی به عدد ثابتی میل می‌کند؟

در روش قطبی با نزدیک شدن هذلولی به مجانبش بردار مکان به چه چیزی میل می‌کند؟

۲- مخروطی دو سرباز را در نظر بگیرید (یعنی هم نیم‌مخروط بالا دارد هم نیم‌مخروط پایین) که محور مخروط، محور Z است و زاویه نیم‌رأس مخروط α است. صفحه‌ی p را هم به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که عمود بر صفحه YZ باشد و مخروط را قطع کند. مؤلفه‌ی z نقطه تقاطع p و محور Z را z_0 می‌نامیم و زاویه‌ی بین p و صفحه‌ی XY را θ می‌نامیم.

الف) به صورت شهودی بگویید که اگر هذلولی تشکیل شود، آیا به نظرتان خروج از مرکز دو نیم‌شاخه‌ی هذلولی، با هم برابر است؟ یا به عبارتی دیگر، آیا زاویه‌ی بین دو مجانب در دو نیم‌هذلولی برابر است؟معادلات نوشته شده در متن به شما چه می‌گوید؟ اشکال کار در کجاست؟

ب) a و b را بر حسب پارامترهای معلوم مسئله بیان کنید.

این که بگوییم: «یک نقطه، یک بیضی و یک خط،یک سهمی و دو خط متقاطع، یک هذلولی است» آیا درست است؟ اگر درست است چگونه می‌توان غیر از کیفی گفتن، این را با معادلات ثابت کرد؟

ج) مطلب بالا را این طور می‌توانید نشان دهید. یک صفحه را با مخروط قطع دهید به طوری زاویه صفحه با افق کمتر از $90-\alpha$ باشد و فقط از نقطه مشترک دو نیم مخروط بالا و پایین (یعنی نقطه رأس) بگذرد. انتظار دارید چه ببینید؟ اگر صفحه با ارتفاع کمتری مخروط را قطع می‌کرد انتظار داشتید چه ببینید؟ همین کار را برای هذلولی و سهمی هم انجام دهید ببینید دو خط متقاطع و یک خط یا نیم خط تشکیل می‌شود؟

د) استدلال بالا استدلالی هندسی بود. مطالب بالا را با استفاده از پارامترهای مقاطع مخروطی a و b و p بیان کنید و بگویید در حالت نقطه و خط و دو خط متقاطع، هر کدام از این پارامترها برای مقطع مخروطی مرتبط برابر چه می‌شود؟

ه) آیا یک پاره‌خط بیضی، یک نیم خط، سهمی، یک خط یا دو خط متقاطع، هذلولی است؟چرا؟ اگر قبول دارید که یک خط هم می‌تواند هذلولی باشد بیان کنید که شرایط مخروطی که صفحه آن را قطع می‌کند باید چگونه باشد.

۳- الف) یک استوانه با محور Z در نظر بگیرید. صفحه‌ای با زاویه‌ی دل‌خواه نسبت به XY را با آن قطع دهید. از دو روش تحلیلی و هندسی گفته شده در درس‌نامه سعی کنید نشان دهید که شکل حاصل از تقاطع یک بیضی است. رابطه‌ی بین زاویه با XY و خروج از مرکز بیضی را بیابید.

راهی زیباتر!! آیا استوانه یک مخروط راست است یا خیر؟ دلیلی برای پاسخ خود پیدا کنید. آیا این مسئله را قبلاً حل نکرده‌اید!؟ حساب خروج از مرکزش را چه‌طور؟

ب)اگر یک سکه دایروی را در فاصله‌ای دور از چشم کج بگیریم، آن را چه می‌بینیم؟چرا؟

راه‌نمایی:برای این که بتوانید این سؤال را حل کنید شاید بهتر باشد به قسمت الفِ سؤال ۱۹ نگاهی بیندازید.

ج) تعبیر دیگری از قسمت (ب) این است: یک استوانه در نظر بگیرید که مقطعش بیضی‌شکل است. صفحه‌ای را با زاویه نسبت به افق با این استوانه قطع می‌دهیم. با استفاده از روش تحلیلی که در قسمت (الف) هم از آن استفاده کردید نشان دهید شکل حاصل مقطعی مخروطی است و تابعیت خروج از مرکز آن را بر حسب زاویه صفحه نسبت به افق بیابید و بعد نتیجه بگیرید که در زاویه‌ای مشخص، شکل حاصل یک دایره خواهد بود. این دایره چیست؟ آیا چیزی جز همان سکه‌ی دایره‌ای شماست!؟

برای مشاهده شهود بیشتر راجع‌به این مسأله به قسمت (ی) مسأله 34 نگاه کنید.

۴- مسیر ستاره‌ها در آسمان چه شکلی است؟ فرض کنید دستمان را به سمت ستاره‌ای مشخص وقتی که بالای افق است دراز می‌کنیم و همین طور که ستاره در اثر چرخش زمین حرکت می‌کند، ما هم دستمان را طوری تکان می‌دهیم که همواره جهت انگشتانمان به سمت ستاره باشد.

الف) شکلی که حاصل از تکان دادن دستمان در فضا ایجاد می‌شود چیست؟

ب) آیا می‌توان گفت نورهایی که مدام از ستاره در جاهای مختلف آسمان به چشممان می‌آید هم مسیری مشابه دستمان در فضا دارند؟ به عبارت دیگر، در طول مدتی که ستاره بالای افق است، نورش تحت چه شکلی به چشم ما وارد می‌شود؟

حال فرض کنید در عرض جغرافیایی φ دیرکی را روی زمین به صورت عمودی قرار داده‌ایم. با استفاده از مطالبی که در متن راجع به داستان‌های صفحه و مقطع مخروطی داشتیم:

ج) استدلال کنید که مسیر نوک سایه‌ی دیرک که بر اثر تابش خورشید ایجاد می‌شود، روی زمین، یک مقطع مخروطی است.

د)خروج از مرکز و دیگر ویژگی‌های فیزیکی مقطع مخروطی را بر حسب عرض جغرافیایی و میل خورشید و طول دیرک بیان کنید. آیا جوابتان در حالت‌های خاصی مثل قطب و استوا برقرار است؟

۵- طبق تعریف زیر از هذلولی:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله‌ی آن‌ها با نقطه به فاصله‌ی آن‌ها با خط برابر e باشد، مقطع مخروطی با خروج از مرکز e را می‌سازد. (e>1)

بیان کنید که آیا منطقی است هذلولی مجانب داشته باشد یا خیر؟ اگر مجانب دارد طبق راه بالا، زاویه‌ی آن با محور افق چگونه داده می‌شود؟

۶- اگر بخواهید با دید فیزیکی‌تری به مسئله‌ی یکی بودن سهمی و بیضی نگاه کنید، ممکن است این ایراد را وارد کنید که به بی‌نهایت میل دادن نیم‌قطر بزرگ چه معنی دارد؟ گرچه این عملاً مشکلی نیست ولی این را امتحان کنید: اگر یک بیضی با نیم‌قطر محدود و مشخص داشته باشیم آیا اگر بررسی بیضی را معطوف به بررسی نقاط یک سر بیضی (سرِ نزدیک به کانون مورد نظر) بکنیم و روی یک قسمت از بیضی نقاط را بررسی کنیم به طوری که تا تقریب‌های پایین خیلی از سرِ بیضی فاصله نگیریم به طوری که از تقریب‌های مرتبه دو به بالای نسبت مقدار جابه‌جایی از سرِ بیضی به نیم‌قطر بزرگ را بتوانیم صرف‌نظر کنیم، آن‌گاه معادله‌ی بیضیِ ما تبدیل به سهمی می‌شود یا خیر؟ اگر آری، باید گفت که در حدِ میل نیم‌قطر بزرگ به بی‌نهایت تمام نقاطی که در صفحه بررسی می‌کنیم به یک نحوی در حکم *نزدیکی به سرِ بیضی* هستند و این یعنی اثبات مسئله در حالت کلی و نه فقط xهایی مشخص.

۷- در متن ثابت کردیم که یکی از حالات مدار یک جسم به دور جسمی خیلی پرجرم‌تر، بیضی است. در واقع اگر فیزیکی‌تر بگوییم هنگامی که انرژی کل جسممان منفی باشد مداری محدود دارد که اثبات می‌شود که انرژی مدار بیضی منفی است. پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از نقطه‌ی a روی زمین با زاویه‌ای مشخص نسبت به افق و سرعتی معلوم طوری پرتاب می‌کنیم که در نقطه‌ی b روی زمین فرود بیاید و می‌دانیم فاصله‌ی a تا b لزوماً کوچک نیست و شاید با شعاع زمین قابل مقایسه است. اگر انرژی کل جسم منفی باشد مدار جسم قسمتی از یک بیضی می‌شود که مرکز زمین کانون آن است. حال اگر a به b بسیار نزدیک باشد به طوری که فاصله‌شان نسبت به شعاع زمین ناچیز باشد:

الف) در این حالت بردار شتاب گرانش برای نقاط مختلف مسیر پرتابه با تقریب بسیار عالی ثابت است. حرکت در چنین میدانی تحت چه مسیری است؟

ب) دیدگاه بالا از نگاه مکانیک بود. ولی آیا شما قبلاً این مسئله را حل نکرده‌اید!؟ از دیدگاه هندسی بیضی و سهمی به جواب قسمت الف برسید. راهنمایی: اگر مدار انرژی منفی یک جسم، بیضی است آیا مداری که در قسمت بالا هم به دست آوردید بیضی است چون انرژی‌اش منفی است؟ دلیل منطقی بیاورید.

۸- در قسمت هندسه هذلولوی متن شکل هذلولی‌ای کشیده‌شده بود که بی‌دلیل در آن طولی $\tanh \alpha$ معرفی شده بود. این را با پیدا کردن دو مثلث مناسب و استفاده از یک بودن a اثبات کنید.

۹- نشان دهید برای توابع‌هایپربولیک:

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$$
$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta$$

در نتیجه

$$\tanh(\alpha \pm \beta) = \frac{\tanh\alpha \pm \tanh\beta}{1 \pm \tanh\alpha\tanh\beta}$$

$$\sinh 2\alpha = 2\sinh\alpha\cosh\alpha$$

$$\cosh 2\alpha = \cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha = 2\cosh^2\alpha - 1 = 2\sinh^2\alpha + 1$$

پس:

$$\sinh^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cosh\alpha - 1}{2} \quad \text{و} \quad \cosh^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cosh\alpha + 1}{2}$$

۱۰-با استفاده از تعاریف توابع هایپربولیک نشان دهید:

$$d(\sinh\alpha) = \cosh\alpha\, d\alpha$$
$$d(\cosh\alpha) = \sinh\alpha\, d\alpha$$
$$d(\tanh\alpha) = \operatorname{sech}^2\alpha\, d\alpha$$
$$d(\coth\alpha) = -\operatorname{csch}^2\alpha\, d\alpha$$

۱۱-توابع سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانتِ هایپربولیک را رسم کنید. این که بازه‌های هر کدام را بدانید در حل بعضی مسائل به شما کمک می‌کند.

۱۲- در بیان توابع هذلولوی یک راه این است که بگوییم تعریف توابع هذلولوی همان‌هایی است که گفته شد و بعد نتایجی می‌گیریم مثل این که می‌توانیم در شکل هذلولی محورهای هایپربولیک را نشان دهیم (کاری که در متن انجام شد) و یک راه دیگر این است که بگوییم ما تعریفی که از توابع هذلولوی می‌کنیم در ابتدا بر اساس شکل است و سپس به رابطه ریاضی توابع هذلولوی برسیم. یعنی برای مثال، تعریف می‌کنیم سینوس هایپربولیک یک پارامتر برابر باشد با طول پاره‌خط عمودی‌ای که از تصویر شدن یک نقطه روی هذلولی بر محور X به دست می‌آید و بعد نشان دهیم که:

$$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

این کار را هم برای سینوس هم کسینوس هم تانژانت انجام دهید.

✻ ۱۳- می‌خواهیم $\int_1^{x_P} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$ را حساب کنیم. همان‌طور که گفتیم یک راه، حساب توسط توابع هایپربولیک است. ولی فارغ از آن، عموماً چون که شاید با توابع مثلثاتی آشنایی داریم شاید تغییر متغیر

$x := \sec\theta$ سریع به ذهنمان برسد.باید گفت که اگر از راه مثلثاتی برویم در عین این که آخر به همان جواب هایپربولیک می‌رسیم، فقط راه را پیچیده‌تر کرده‌ایم و این را شما در این مسئله نشان می‌دهید.

الف) با تغییر متغیر گفته شده در بالا پیش روید و انتگرال بالا را برسانید به انتگرال‌های پایه‌ای‌تر مثلِ:

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

و اما گرفتن انتگرال بالا شاید خیلی راحت نباشد و نیاز به ایده دارد. ولی به عنوان راهنمایی تا قسمتی از ایده حل را می‌نویسیم:

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1-\sin^2\theta)^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2 d(\sin\theta)$$
$$= \cdots$$

نشان دهید که در نهایت با استفاده از:

$$\int \sec\theta\, d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$$

می‌رسیم به:

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \tan\theta)$$

با بازگرداندن تغییر متغیری که انجام دادید به متغیر اصلی نتیجه بگیرید:

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

اما راه هایپربولیک ساده‌تر و در دسترس‌تر است. کافیست با چک کردن بازه‌های مجاز برای x تابع هایپربولیک مناسبی حدس بزنید که دامنه‌ی x را پوشش دهد و برایش اتحاد داشته باشید که کارتان ساده شود. قرار می‌دهیم $x := \cosh\beta$ نشان دهید که انتگرال بالا می‌شود:

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \sinh^2\beta\, d\beta$$

با استفاده از اتحادی مناسب از مسئله ۹، ثابت کنید:

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{\sinh 2\beta}{4} - \frac{\beta}{2} = \frac{\sinh\beta\cosh\beta}{2} - \frac{\beta}{2}$$

با جای‌گذاری β:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{\cosh(\cosh^{-1}x)\sinh(\cosh^{-1}x)}{2} - \frac{\cosh^{-1}x}{2}$$

نشان دهید:

$$\sinh(\cosh^{-1}x) = \sqrt{x^2-1}$$

پس:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\cosh^{-1}x}{2}$$

جواب بالا را با جواب حالت مثلثاتی مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\cosh^{-1}x}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

نشان دهید تساوی بالا برقرار است. کافیست نشان دهید:

$$\cosh\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right) = x$$

می‌بینیم که جواب‌ها یکی است ولی سادگی راه هایپربولیک کجا و راه مثلثاتی کجا!! پس اگر گاهی در انتگرالی دیدیم که تابع مثلثاتی جواب ساده‌ای نمی‌دهد بد نیست که تابع هایپربولیک هم امتحان کنیم و بعد شاید بتوانیم با روابطی مثل رابطه‌ی بالا توابع هایپربولیک را به چیزهایی مثل ln یا .... ربط دهیم.

۱۴- خصوصیت یک صفحه تخت چیست؟ دو بردار دل‌خواه در فضا در نظر بگیرید. می‌دانیم که از هر دو بردار یک صفحه می‌گذرد. صفحه‌ای از دو بردار می‌گذرانیم. حال می‌دانیم که این صفحه بردار عمود بر آن صفحه هم دارد. نام این بردار را $\vec{N}$ می‌گذاریم. فرض کنید مؤلفه‌هایش به این صورتند:

$$\vec{N} = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$$

خصوصیت این بردار این است که بر تمام بردارهای داخل این صفحه عمود است. نقطه‌ای مشخصِ دل خواه به عنوان نقطه مرجع در صفحه با مختصات $(x_0\,, y_0\,, z_0)$ در نظر بگیرید. حال فرض کنید می خواهید نقطه‌ای دیگر با مختصات کلیِ $(x\,, y\,, z)$ را بررسی کنید. برداری رسم کنید که این نقطه را به نقطه مرجع وصل کند. اسم این بردار را که یک سرش همیشه ثابت است و یک سرش متغیر، $\vec{r}$ بگذارید.

الف) با توجه به عمود بودن $\vec{r}$ بر $\vec{N}$ رابطه‌ای برای x،y و z بر حسب معلومات بیابید. باید به رابطه‌ای برسید به فرمِ

$$\bar{A}x + \bar{B}y + \bar{C}z = 1 \text{ یا } 0$$

که ضرایب جدید ممکن است با A و B و C فرق کنند و باید تعیین شوند. در چه حالتی طرف راست تساوی صفر است و در چه حالتی یک؟

ب) نشان دهید

$$\begin{cases} \bar{A} = \dfrac{A}{Ax_0 + By_0 + Cz_0} \\ \bar{B} = \dfrac{B}{Ax_0 + By_0 + Cz_0} \\ \bar{C} = \dfrac{C}{Ax_0 + By_0 + Cz_0} \end{cases}$$

تقلب!: اگر موفق به حل الف نشده‌اید رابطه‌های بالا به شما کمک

می‌کنند!

ج) استدلال کنید که چون بردار $\vec{M}$ بر صفحه عمود است، بردارِ

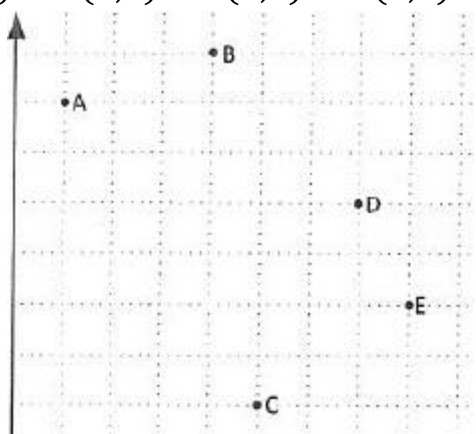
$$\vec{N} = \bar{A}\hat{\imath} + \bar{B}\hat{\jmath} + \bar{C}\hat{k}$$

هم بر آن صفحه عمود است.

۱۵- سؤال مرحله دوم دوره پنجم المپیاد کشوری نجوم و سؤال کتاب مکانیک نوشته‌ی تاتوم!:

شکل زیر پنج نقطه از مدار جرمی آسمانی را نشان می‌دهد که مختصات نقاط آن به صورت زیر است:

$A: (1,8) \quad B: (4,9) \quad C: (5,2) \quad D: (7,6) \quad E: (8,4)$



این مدارِ کدام یک از مقاطع مخروطی است؟ مشخصات مدار را محاسبه کنید.

پاسخ: بیضی، $x_0 = 4.6187$ و $y_0 = 5.4246$ و $a = 5.0459$ و $b = 2.2646$ و

زاویه انحراف محور بزرگ بیضی با محور X = $128.8512°$

۱۶- الف) با استفاده از حل دستگاه سه معادله سه مجهولی که در متن اشاره شد برسید به:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y''_0 \cos\alpha - z''_0 \sin\alpha\cos\theta \\ y''_0 \sin\alpha + z''_0 \cos\alpha\cos\theta + y_0 \\ z''_0 \sin\theta \end{bmatrix}$$

ب) یک راه دیگر استفاده از ماتریس‌های دوران است. دستگاهی که روی صفحه مقطع مخروطی خوابیده است را با دوران‌های مناسب و سپس با یک انتقال به دستگاه سه بعدی اصلی تبدیل کنید و با نوشتن ماتریس‌های دوران مناسب برسید به رابطه بالا.

* ۱۷- می‌دانیم برای حالت نیروی جاذبه گرانشی، مسیر یک جرم با انرژی مثبت یک هذلولی است که کانون هذلولی همان مبدأ نیروست. یعنی اگر فرض کنیم که مسیر جسم، شاخه‌ی سمت راست هذلولی است، یعنی مبدأ نیرو در کانون سمت راست هذلولی است. حال نیروی مرکزی از جنس دافعه (مثلاً دو بار هم نام)درنظربگیرید.بااستفاده‌از

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(u)}{mh^2u^2}$$

نشان دهید مسیر جسم یک هذلولی است و اگر مثلاً مسیر جسم را شاخه‌ی سمت راست در نظر بگیریم، نقطه‌ای را روی محور X پیدا کنید که مبدأ نیرو باید آن‌جا باشد.

پاسخ: آن یکی کانون! یعنی اگر مسیر جسم، شاخه‌ی راست هذلولی باشد، مبدأ نیرو در کانون چپ آن است نه راست! زرنگی نکنید! که جواب کانون سمت چپ را در معادله بگذارید و این جواب را تأیید کنید! *نه خیر!* شما باید نقطه‌ای دلخواه را روی محور X بگیرید و بعد نشان دهید این نقطه همان کانون چپی است.

۱۸-با دقت به مسئله ۹ اثبات کنید:

$$\int \cosh^2\beta \ d\beta = \frac{\sinh(2\beta)}{4} + \frac{\beta}{2}$$

$$\int \sinh^2\beta \ d\beta = \frac{\sinh(2\beta)}{4} - \frac{\beta}{2}$$

۱۹-الف) با استفاده از معادله دکارتی بیضی:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

و معادله دکارتی یک دایره به شعاع a و مقایسه یک نقطه روی بیضی و یک نقطه روی دایره و هر دو با x برابر برسید به چیزی که در متن داشتیم:

$$\frac{GP}{GQ} = \frac{b}{a}$$

ب) همین کار را برای هذلولی دل‌خواه و هذلولی کمکی آن انجام دهید و به نتیجه‌ی بالا برسید.

ج) اگر بخواهیم مساحت بیضی را حساب کنیم لااقل دو روش وجود دارد. یک انتگرال‌گیری و دو، استفاده از رابطه بالا. هم به روش انتگرال گیری و هم به روشی که در متن، مساحت قطاعی از بیضی با استفاده از رابطه بالا حساب شد، این کار را برای کل بیضی انجام دهید و برسید به مساحت بیضی:

$$A_{\text{بیضی}} = \pi ab$$

د) به سادگی با استفاده از مطالب قبلی روابط مفید زیر را نشان دهید:

$$\text{بیضی}\begin{cases} x = a\cos E \\ y = b\sin E \end{cases}$$

$$\text{هذلولی}\begin{cases} x = a\cosh E \\ y = b\sinh E \end{cases}$$

ه)اگر از مرکز بیضی خطی به نقطه‌ای روی محیط بیضی وصل کنیم، یک قطاعی تشکیل می‌شود بین این خط و نیم‌قطر بزرگ. نشان دهید مساحت این قطاع برای بیضی و هذلولی برابر است با $\frac{ab}{2}E$. آیا این مطلب در حالت دایره برای شما ملموس است؟

۲۰-با استفاده از این استدلال که گفتیم سهمی یک بیضی است، بگویید دایره کمکی برای بیضی تبدیل به چه می‌شود برای سهمی؟

راه‌نمایی:ازمعادله

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

که مربوط به بیضی است برای سهمی استفاده کنید! چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این با شهود هندسی‌تان سازگار است؟ ممکن است بپرسید که برای سهمی اگر نتوانیم چیزی کمکی(!) تعریف کنیم پس چگونه باید معادله زاویه زمان را حل کرد؟ در جواب باید گفت که غفلت نکنید! در معادله سهمی زاویه آنومالی واقعی مستقیماً بر حسب زمان به دست می‌آید و نیاز به چیز واسطه‌ای مثل بیضی کمکی نیست.

۲۱-بااستفاده‌از

$$\tanh\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2}$$

الف) بازه‌ی تغییرات E و θ را به ازای خروج از مرکزی مشخص بیابید. (به مسئله ۱۱ دقت کنید)

ب) با استفاده از فرمول بالا به زاویه بین دو مجانب هذلولی برسید.

۲۲-الف) با استفاده از روش جانشانی پی‌درپی هم به طور عددی و هم تئوری اثبات کنید که برای هذلولی نمی توانیم با این روش به جواب معادله

$$e\sinh E - E$$

برسیم. هم‌چنین با دقت به مسئله ۱۱ بیان کنید که آیا می‌توان از روش هندسی به جواب رسید یا خیر؟

ب) با استفاده از شرط گفته شده در روش جانشانی، بازه‌ای برای θ پیدا کنید که برای سهمی:

$$M = \tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

بتوانیم از روش جانشانی استفاده کنیم. هم چنین با استفاده از عددگذاری جواب خود را چک کنید.

پاسخ: بین ۹۰- تا ۹۰+ درجه.

ج) با استفاده از جوابی که بالا به دست آوردید اثبات کنید که:

$$-\frac{4}{3} < M < \frac{4}{3}$$

رابطه‌ی بالا خیلی کمکمان می‌کند، چرا که اگر در مسئله‌ای به یک سهمی بر خوردیم و خواستیم معادله‌ی آن را حل کنیم، اگر M در بازه‌ی بالا صادق بود، یعنی می‌توانیم برای تعیین دقیقِ θ از روش جانشانی استفاده کنیم و گرنه خیر.

د) مضمون سؤالی که در متن مطرح شد: آیا می‌توان برای معادله کپلر بیضی از روش جانشانی استفاده کرد؟

۲۳-نشان دهید توابع و معادلاتی به شکل $x = f(x)$ وجود دارند که فقط یک ریشه ندارند و بیان کنید که چرا این معادلات ممکن است چند ریشه داشته باشند.

راه‌نمایی: از روش هندسی استفاده کنید.

* ۲۴- الف) اگر در روش جانشانی که ما تابع را فقط تا مرتبه یک δ نگه داشتیم نگرانید که مرتبه‌های بالاتر تأثیر دارند یا خیر، اثبات کنید که اگر همه‌چیز را تا مرتبه دو نگه داریم و مرتبه بالاتر از دو را صرف‌نظر کنیم برای بار nامِ جانشانی (یعنی وقتی n بار دکمه‌ی (=) را می‌زنیم!) می‌رسیم به:

$$x = x_0 + \delta\left(f'(x_0)\right)^n + \frac{1}{2}\delta^2 f''(x_0)\sum_{i=n-1}^{2n-2}\left(f'(x_0)\right)^i$$

در رابطه بالا قبلاً اثبات کرده بودیم که طبق شرط مناسبی که انتخاب کرده بودیم، برای n میل به بی‌نهایت مرتبه اول صفر می‌شود نشان دهید که همان شرط کافیست که مرتبه دو هم صفر شود. تا این جا فهمیدیم که تا مرتبه دو صفر می‌شود ولی این همه‌ی مسئله نیست چون که مرتبه‌های بالاتر هم هستند. در حالت کلی می‌توان نشان داد که تمام مرتبه‌های غیر صفر، صفر می‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند به متن زیر برای مشاهده اثبات ساده ریاضی آن و مشاهده مطالب دیگر مراجعه کنند:

http://pages.cs.wisc.edu/~amos/412/lecture-notes/lecture03.pdf
Lecture 3: Solving Equations Using Fixed Point Iterations

۲۵-الف) یک سهمی را حول محور اصلی‌اش می‌تابانیم تا یک رویه‌ی سهموی درست شود. قسمت بیرون رویه را نقره اندود می‌کنیم تا داخل مانند آینه عمل کند. دسته پرتو موازی نور و موازی محور اصلی، به سهموی می‌تابانیم. طبق اصل فرما می‌توان نتیجه گرفت که پرتوهای نور مسافت‌های برابر را طی می‌کنند. با استفاده از این ثابت کنید که نورها در کانون سهمی جمع می‌شوند.

ب) همین کار را برای یک هذلولی می‌کنیم منتها این دفعه لزومی ندارد که دسته پرتوهای موازی در کانون با هم جمع شوند. دسته پرتوهایی را پیدا کنید که در کانون، کانونی شوند.

راه‌نمایی: "آیا هذلولی یک بیضی است!؟" چه بود؟

ج) برای یک بیضی‌گون که سطح داخلش آینه است هم نشان دهید اگر در یک کانون منبع نوری داشته باشید، نورها از سطوح بازتاب می‌شوند و در آن یکی کنون جمع می‌شوند.

۲۶-فرض کنید یک بیضی به معادله‌ی زیر داریم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

و فرض کنید یک خط به معادله زیر داریم:

$$y=mx+h$$

الف) با فرض این که خط بالا به بیضی مماس است، نشان دهید:

$$h^2=m^2a^2+b^2$$

ب) هم چنین نشان دهید معادله خط مماس را می‌توان به صورت ساده‌ی زیر نوشت:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

که در آن x_0 و y_0 مختصات نقطه‌ی مماسند.

برای سهمی‌ای به معادله

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

ج) نشان دهید

$$h^2 = p^2 m^4$$

د) نشان دهید معادله خط مماس به صورت زیر می‌شود:

$$y - y_0 = \frac{x_0(x - x_0)}{2p}$$

حال هذلولی‌ای را در نظر بگیرید به معادله‌ی:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ه) نشان دهید

$$h^2 = m^2 a^2 - b^2$$

و) برسید به معادله‌ی خط مماس:

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

با استفاده از سؤال بالا حل کنید:

۲۷-طول ضلع مربع محیط به بیضی به معادله زیر را بیابید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(از مجموعه سؤالات آقای صدرا صدرالدینی)

راهنمایی: (در ابتدا مربع محیط به بیضی را رسم کنید که در ۴ نقطه مماس باشند.سپس دستگاهی که بیضی در ان دستگاه با معادله‌ی بالا مشخص می‌شود بکشید و بعد از آن از خاصیت خط مماس استفاده کنید)

۲۸-

یک سیستم دوتایی با میل مداری ۹۰ درجه در نظر بگیرید.طول حضیض این سیستم(مدار نسبی) ω می‌باشد.ناظری در زمین این سیستم را بررسی می‌کند و مسیر حرکت ستاره‌ی همدم نسبت به ستاره‌ی مرکزی را که حرکت آن بر روی خط مستقیمی خواهد بود رسم می‌کند به طوری که طول این خط را نیم قطر زاویه‌ای نیم‌محور بزرگ ستاره در نظر می‌گیرد. خطای نسبی این ناظر را در اندازه‌گیری نیم‌محور اطول بیابید. (از مجموعه سؤالات استاد نیما چرتاب سلطانی)

راهنمایی: (میل مداری ۹۰ درجه یعنی ناظر مدار را به شکل خط می‌بیند. اینکه مدار ω دارد یعنی اگر بر روی کانون بیضی بنشینید راستای حضیض ω درجه با راستای ناظر تفاوت دارد. بعد از آن با خود فکر کنید که ناظر چه فاصله‌ای را به عنوان نیم قطر بزرگ می‌بیند و به رابطه‌ی به دست آورده شده فکر کنید.)

۲۹-

مدار زمین را دایره‌ای با شعاع یک واحد نجومی در نظر بگیرید.زاویه‌ی بین زمین و راستای حضیض مدار عطارد از دید خورشید ۱۲۰ درجه می‌باشد در این لحظه بیشترین کشیدگی شرقی و غربی ممکن از دید زمین چند درجه است؟ (از مجموعه سؤالات استاد نیما چرتاب سلطانی)

راهنمایی: (بیشترین کشیدگی شرقی یا غربی با دو خط مماس تعریف می‌شوند آن دو خط را بیابید و مشخصات آن‌ها را با استفاده از معادلاتی که در دست دارید به دست آورید)

۳۰- الف) با استفاده از قضیه اویلر و توابع هایپربولیک روابط بین تمام توابع مثلثاتی را با توابع هایپربولیک متناظرشان در فضای موهومی به دست آورید (یعنی زوایا ضرب‌در i شوند)

ب) رابطه‌ی

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

را چک کنید ببینید می‌توانید در فضای موهومی به معادله متناظر برای هذلولی برسید؟

۳۱- با استفاده از بسط تیلور و مشتق‌گیریهای مرتبه‌های مختلف توابع نمایی و سینوس و کسینوس و معکوس تانژانت را به دست آورید.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

۳۲- با استفاده از بسط تیلور و مشتق‌گیری‌های مرتبه‌های مختلف بسط دو جمله‌ای را بیابید.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

۳۳- با کشیدن یک خط عمودی بر محور X در صفحه XY و یک نقطه روی محور X با نوشتن معادلات و استفاده از این تعریف مقطع مخروطی:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله‌ی آن‌ها با نقطه به فاصله‌ی آن‌ها با خط برابر e باشد، مقطع مخروطی با خروج از مرکز e را می‌سازد.

مستقیماً به معادلات دکارتی مقاطع مخروطی برسید.

** ۳۴- **مخروط مایل!** (این قسمت اختیاری است و شاید برای المپیاد خیلی ضرورت نداشته باشد)

در طول متن توجه خود را معطوف به مخروط‌های راست کردیم ولی گفتیم در حالت کلی مخروط‌هایی هم (که ما نامشان را مایل می‌گذاریم) وجود دارند که حاصل از وصل کردن یک نقطه در فضا به تمام نقاط محیط یک دایره است.در این قسمت قرار است کمی با آن‌ها آشنا شویم.

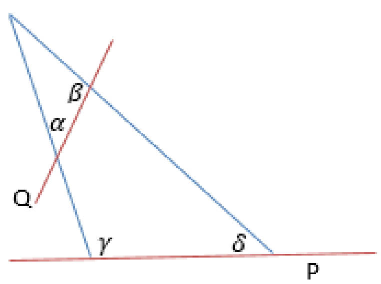
الف) در ابتدا می‌خواهیم معادله‌ی یک مخروط مایل را در سه بعد به دست آوریم. برای این منظور یک دایره را طوری در نظر بگیرید که صفحه دایره با صفحه‌یXY موازی باشد و مرکز دایره در مختصات $(0, y_0, z_0)$ باشد. از مبدأ مختصات به نقطه‌ای دلخواه روی محیط دایره خطی وصل کنید و معادله‌ی این خط را بنویسید. حال سعی کنید معادله‌ای به دست آورید که تمام خطوطی که از مبدأ به تمام نقاط دایره وصل می‌شوند را توصیف کند. این معادله می‌شود معادله سطح مخروط مایل در سه بعد.

پاسخ: اگر فرض کنیم رأس مخروط مایل در مبدأ است و دایره‌ی قاعده موازی به صفحه XY است و مرکزش در مختصات $(0, y_0, z_0)$ است و شعاعش برابر R است، آن گاه معادله مخروط مایل می‌شود:

$$\left(y - \frac{y_0}{z_0}z\right)^2 = x^2\left(\frac{R^2z^2}{z_0^2x^2} - 1\right)$$

سعی کنید معادله بالا را حتماً به دست آورید. هم چنین در حالت مخروط راست آن را چک کنید.

ب) حال صفحه‌ای افقی دلخواه را در نظر بگیرید که z مشخصی دارد. این صفحه را با مخروط قطع دهید. شکل حاصل چه می‌شود؟ آیا جز یک دایره!؟

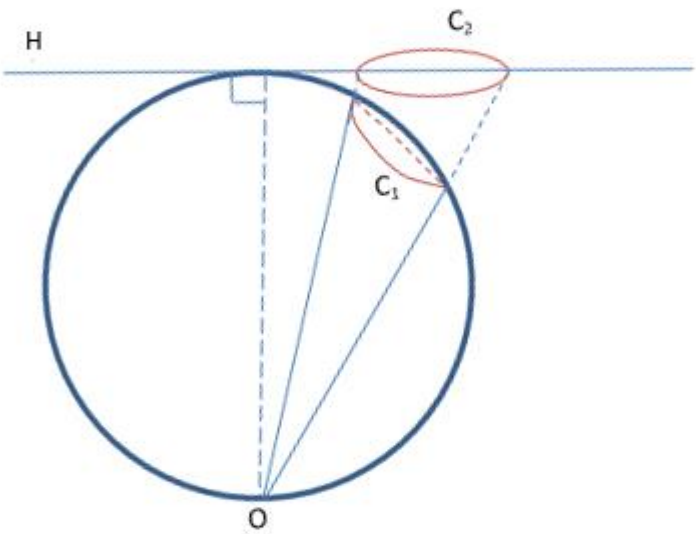


ج)شکل مقابل را در نظر بگیرید. این شکل یک مخروط مایل است به طوری که در صفحه P یک دایره داریم. به روش های مختلفی اثبات می‌شود که اگر $\alpha = \delta$ و $\beta = \gamma$ آن گاه مقطع حاصل شده در صفحه Q هم یک دایره خواهد بود. اثبات‌های زیبایی دارد ولی شما هم سعی کنید آن را با روش

بالا و قطع دادن صفحه با مخروط اثبات کنید، گرچه شاید طولانی شود. این مطلب در مسئله‌ی تسطیح‌ها خیلی مفید است ولی از آن جایی که فعلاً قصد بررسی مفصل تسطیح را نداریم به مخروط مایل به عنوان یک مخروط نگاه می‌کنیم و صرفاً معادله‌اش را می‌نویسیم.* (به آخر مسأله نگاه شود)

برای آشنایی، کمی شکل تسطیح را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

د) شکل زیر را در نظر بگیرید.اگر دقت کنید در این شکل که C_1 در آن یک دایره روی کره است)، مخروطی که داخل کره است و رأسش O است یک مخروط مایل است. در روش *تسطیح اسطرلابی یا stereographic* ما می خواهیم همه نقاط روی کره را به نحوی خاص روی صفحه‌ی H تصویر کنیم. نحوه‌ی خاص به این گونه است که از O به نقطه‌ای که می‌خواهیم تصویرش کنیم وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا در محل تصویرش صفحه H را قطع کند. آیا حال که C_1 دایره‌ای روی کره است اگر به این روش تسطیحش کنیم C_2 هم یک دایره است؟



راه‌نمایی: از قسمت ج کمک بگیرید.

ه) اگر در قسمت ج نتوانستید موضوع خواسته شده را اثبات کنید با شکل بالا و استفاده از روش تسطیح احتمالاً شهودتان روی قضیه بیشتر می‌شود. آیا اگر معادله‌ی نقاط تسطیح شده از C_1 را در صفحه H بنویسید به معادله دایره می‌رسید؟ امتحان کنید.

و) و اما تسطیح اسطرلابی مزیت دیگری هم دارد و این که غیر از حافظ دایره بودن، حافظ زاویه هم هست. این مطب را با کشیدن زاویه‌ای دل‌خواه روی سطح کره و سپس تسطیح آن نشان دهید. برای خاطر جمع شدن زاویه‌ای خاص مثلاً ۹۰ درجه را روی کره بگیرید و ببینید آیا این مطلب درست است.

ز) حالا از تسطیح می‌کشیم بیرون و بعد باز می‌گردیم! مخروط راست مخروطی بود که اگر محور آن را عمودی می‌گرفتیم و در این حالت صفحه‌ای افقی با مخروط قطع می‌دادیم، یک دایره تشکیل می‌شد. حال مخروطی را در نظر بگیرید که زاویه نیم رأس آن ثابت نیست و یک بیضی را طی می‌کند، یعنی اگر محور آن را عمودی بگیریم و یک صفحه افقی با آن قطع دهیم یک بیضی تشکیل خواهد شد. مقدار بزرگترین زاویه نیم رأس مخروط را α و کوچکترین زاویه نیم رأس مخروط را β می‌نامیم. مطابق روشی که در قسمت "ره‌یافت تحلیلی" داشتیم بیان کنید اگر صفحه‌ای که با افق زاویه θ می‌سازد را با این مخروط قطع

دهیم چه اتفاقی می‌افتد. نشان دهید در حالتی خاص دایره تشکیل می‌شود و این که دایره‌ای که تشکیل می‌شود باید آن θ ِمشخص را داشته باشد و بس! به این که صفحه از کجا مخروط را قطع کند و از چپ قطع کند یا از راست، ربطی ندارد و فقط تابع θ است.

ح) حال می‌خواهیم با استفاده از قسمت بالا ادعایی کنیم:

مخروط مایل چیزی از سنخ مخروطی است که در قسمت (ز) توصیف شد. یعنی مقطعش بیضوی است نه دایروی.

مطلب بالا را با قطع دادن صفحه‌ای مناسب با مخروط مایل و استفاده از شگردی که در قسمت "ره‌یافت تحلیلی" اشاره کردیم، نشان دهید. صفحه‌ای مناسب یعنی چه؟ برای مخروط راست صفحهd مناسبمان یک صفحه افقی بود که در آن شکل دایره‌ای می‌شد. سعی کنید صفحه مناسب را انتخاب کنید و نشان دهید که شکل حاصل بیضی است.

و اما مطلب بالا به چه درد ما می‌خورد؟ این که بفهمیم مخروط مایل یک مخروطی است که مقطعش بیضوی است چه سودی دارد؟ برایش دو فایده مطرح می‌کنیم.

فایده اول:

ط)در قسمت (ج) و (ه) از شما خواسته شده بود حافظ دایره بودن مخروط مایل به روش تسطیح اسطرلابی را اثبات کنید. از طرفی در قسمت (ز) خواسته شد که نشان دهید اگر صفحه‌ای با مخروط مایل قطع دهیم، این که شکل حاصل دایره می‌شود یا خیر فقط به زاویه آن صفحه با محور مخروط بستگی دارد(محور مخروط را نیم ساز رأس مخروط در شکلی که در قسمت (ج) کشیده شده تعریف می‌کنیم). نشان دهید زاویه صفحه P و Q در شکل قسمت (ج) با محور مخروط برابر است. از این حرف چه نتیجه می‌گیرید؟ آیا غیر از این که اگر شکل حاصل در صفحه P دایره بود، شکل حاصل در Q هم دایره خواهد بود. بدین ترتیب حافظ دایره بودن اثبات می‌شود.

فایده دوم:

برای این فایده ابتدا این مقدمه را نگاه کنید.

ی) در مسأله ۳ گفته بودیم که اگر از دور به سکه‌ای دایروی نگاه کنیم آن را بیضی شکل می‌بینیم چون که راستای دید ما چون از دور نگاه می‌کنیم مثل یک استوانه است و اگر دایره‌ای این استوانه را قطع کند شکل حاصل بیضی است (به عبارت دیگر استوانه‌ای با مقطع بیضوی وجود دارد که می‌تواند دقیقاً محیط سکه‌ی دایروی را قطع کند به این معنی که تمام نقاط روی محیط دایره‌ی سکه روی سطح استوانه هم باشند و چون که انتظار داریم رفتار یکتایی مشاهده کنیم می‌گوییم چون برای هر دایره چنین استوانه‌ای وجود دارد پس اگر به یک دایره از فاصله‌ی دور به صورت کج نگاه کنیم آن را بیضی می‌بینیم). ولی اگر از نزدیک نگاه کنیم باز هم مطلب به این بداهت است؟ ممکن است بگویید از نزدیک که نگاه کنیم دید ما

یک مخروط است و اگر صفحه‌ای مخروط را قطع کند بیضی تشکیل می شود. ولی مخروط دید شما لزوماً راست نیست که بتواند به راحتی برایش این نتیجه را بگیرید. نشان دهید در حالت کلی مخروط دید شما مخروط مایل است و با استفاده از قسمت (ح) نتیجه بگیرید در هر حالتی چه دور چه نزدیک اگر کج نگاه کنید نه عمود، از یک سکه دایره‌ای شما یک بیضی می‌بینید.

ک) نشان دهید در فاصله‌های دور مخروط مایل و راست و استوانه به هم میل می‌کنند.

ل) مطالب گفته شده برای مخروط مایل فقط برای بیضی نیست. این که توانستیم نشان دهیم مقطع مخروط مایل یک بیضی است کارمان را خیلی راحت کرد. نشان دهید که برحسب زاویه صفحه‌ای که با مخروط مایل قطعش می‌دهیم نسبت به افق می‌توان هر سه نوع مقطع مخروطی را داشت.

* برای علاقه‌مندان به این موضوع و آشنایی بیشتر با مقاطع مخروطی و مخروط مایل و اثبات‌های هندسی کتاب زیر پیشنهاد می‌گردد:

CAMBRIDGE MATHEMATICAL SERIES
CONIC SECTIONS

GEORGE BELL & SONS
LONDON: YORK STREET, COVENT GARDEN
AND NEW YORK, 66, FIFTH AVENUE
CAMBRIDGE: DEIGHTON, BELL & CO.

از این‌جا به بعد سؤال‌های بخش "زمان در مدار" سری سؤالات مکانیکِ استاد حمیدرضا اکبری که از وبلاگشان هم قابل دریافت است را با کسب اجازه قرار دادیم.

زمان در مدار

۱- جسمی را از نقطه ای با طول و عرض جغرافیایی ۴۰°E و ۳۰° به سوی نقطه ای در آسمان با سمت و ارتفاع ۱۰۰°E و ۳۰° با سرعت ۵km/s پرتاب می کنیم (از چرخش زمین صرفنظر کنید). جسم چه مدت بعد و در نقطه ای با چه مختصاتی به زمین برخورد می کند؟

۲- ماهواره ای در مداری به دور زمین در حال حرکت است. در یک لحظه بردار های سرعت و مکان این ماهواره در دستگاهی که مبدا آن مرکز زمین است و محور z آن به سمت قطب شمال و محور x به سمت نقطه اعتدال بهاری به صورت زیر است.

$$\vec{r} = 12000\hat{\imath} + 15000\hat{\jmath} - 10000\hat{k} \quad (km)$$
$$\vec{v} = -2000\hat{\imath} + 1000\hat{\jmath} + 2500\hat{k} \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

پس از گذشت زمان ۱۰۰ دقیقه بردار های مکان و سرعت را بیابید.

۳- دو جسم در مدار هایی سهموی و استوایی در جهت خلاف یکدیگر به دور زمین در حال گردشند. فاصله حضیض مدار جسم های ۱ و ۲ به ترتیب عبارتند از $3R_e$ و $5R_e$ هنگامی که جسم ۲ در حضیض مدار خود قرار دارد با جسم ۱ که در حال دور شدن از زمین می باشد برخورد می کند(برخورد را ناکشسان در نظر بگیرید)

الف) هنگامی که جسم ۱ در حضیض مدار خود بوده فاصله جسم ۲ از سطح زمین چقدر بوده است؟

ب) یک ساعت پس از برخورد فاصله جسم حاصل از زمین چقدر است؟

۴- جسمی را با سرعت ۳۰km/s با زاویه ۵۰° با افق از روی زمین پرتاب می کنیم (از چرخش زمین صرفنظر کنید. پس از دو ساعت ارتفاع جسم چقدر است؟ پس از چه مدت زمانی جسم به فاصله ۱۰۰۰۰ کیلومتر از سطح زمین می رسد؟

۵- دو جسم با جرم های برابر $m = \frac{10}{G}kg$ را با شرایط اولیه زیر داریم. در چه زمانی و در چه مختصاتی دو جسم با هم برخورد می کنند؟

$$\vec{r_1} = 2\hat{\jmath} \;\;,\;\; \vec{r_2} = -2\hat{\jmath}$$
$$\vec{v_1} = 5\hat{\imath} \;\;,\;\; \vec{v_2} = 5\hat{\imath}$$

*مسائل رایانه‌ای

۱- الف) برنامه‌ای بنویسید که دستگاه n معادله n مجهول را حل کند.

ب) تمرین مکانیک سماوی دوره تیم جهانی ۲۰۱۵ توسط استاد حمیدرضا اکبری:

نقاط زیر روی یک مقطع مخروطی قرار دارند. خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ این مقطع مخروطی را بیابید.

$$A = \begin{pmatrix} 6.9744 \\ 1.2963 \\ 8.2072 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4.5288 \\ 6.1695 \\ -0.5979 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3.6065 \\ -2.6454 \\ 8.7718 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2.7353 \\ -3.6918 \\ 2.2396 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 6.5664 \\ 0.6178 \\ 8.5150 \end{pmatrix}$$

پاسخ: $a = 7$ و $e = 0.313$

۲- در متن وقتی به بررسی هذلولی در مکانیک رسیدیم گفتیم که شهودی روی T برای هذلولی نداریم ولی بد نیست که برای تمرین سعی کنیم روابطی ولو نامعلوم بیابیم.

الف) برنامه‌ای بنویسید که به ازای e و M مشخص، جواب معادله‌ی زیر را بدهد:

$$e \sinh E - E = M$$

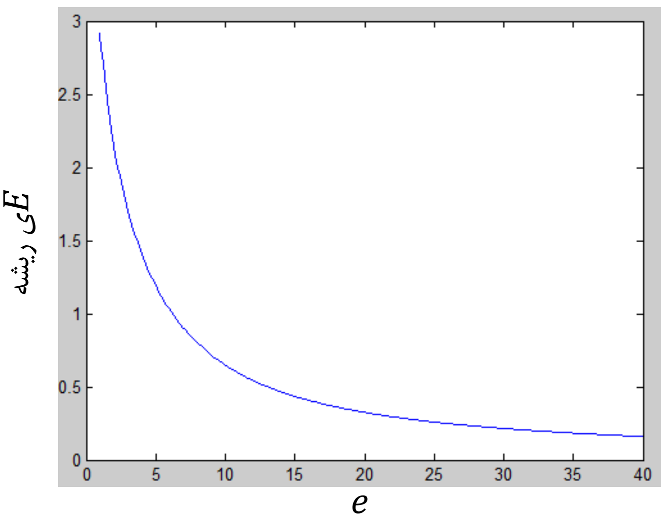
می‌خواهیم خصوصیات T را تشخیص دهیم، بنابراین در زمان $t = T$ داریم $M = 2\pi$. پس با داشتن خروج از مرکز مشخص، جوابی که از معادله‌ی

$$e \sinh E - E = 2\pi$$

به دست می‌آید مربوط به همان نقطه‌ای است که می‌خواهیم بررسی‌اش کنیم.

ب) به ازای خروج از مرکزهای مختلف، نمودار E (که از معادله بالا به دست می‌آید) را برحسب e بکشید.

پاسخ:



می‌بینیم که در شکل، با افزایش خروج از مرکز به سمت بی‌نهایت، بی‌هنجاری خروج از مرکزیِ t=T به صفر میل می‌کند و یعنی عملاً بی‌هنجاری واقعی به صفر میل می‌کند.

ج) فرض کنید جسمی در مدار هذلولوی در t=0 از نقطه‌ی رأس هذلولی شروع به حرکت می‌کند. مدارهای مختلفی با aهای برابر و خروج از مرکزهای متفاوتی در نظر بگیرید. آیا اینکه وقتی خروج از مرکز به بی‌نهایت میل می‌کند، بی‌هنجاری خروج از مرکزیِ نقطه t=T به صفر میل می‌کند به منزله این هم هست که مساحت جاروب شده توسط جسم از t=0 تا t=T به صفر میل کند؟ اگر هست این را داشته باشید!

پارادوکس!

طبق قانون دوم کپلر می‌دانیم که

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \implies A = \frac{ht}{2} = \frac{\sqrt{GMa(e^2-1)}}{2}t$$

چون به ازای مدارهای مختلف a ثابت است داریم:

$$A(t=T) = C\sqrt{(e^2-1)}T$$

که در آن C یک ثابت است. از طرفی Tای که قبلاً تعریف کرده بودیم برابر بود با:

$$T := \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{a^3}}}$$

و بنابراین فقط به a بستگی دارد پس T هم برای همه‌ی هذلولی‌هایمان یکیست. حال، هر چه خروج از مرکز زیاد شود، مساحت جاروب شده هم زیاد می‌شود، آیا این در تناقض با آن چیزی نیست که در اول کار شاید به صورت شهودی احساس می‌کردید؟ اشکال کار در کجاست؟

مراجع علمی

دینامیک کلاسیک ذرات و سیستم‌ها، ماریون، تورنتون

حساب دیفرانسیل و انتگرال، جورج توماس

مکانیک تحلیلی، گرانت.ر.فولز

نجوم کروی، اسمارت

Orbital Mechanics for engineering students, Howard.D.Curtis

اللّهم صلّ علی محمّد و آل محمّد و عجل فرجهم

و الحمد الله رب العالمین