Downloaded from: www.icosmo.ir

سوالات و پاسخ

مرحله دوم

هفتمین المپیاد

نجوم و اخترفیزیک

Ê ¬ · ‚Ì ÿ » ‡ Ž Ž Ë Y € Ë Á

: ½ Â » ‰ Ì æ Y € ¯ ~ e

: | Ì Ë Ä» Ê ‹ Ë { • Ä ‚ ‡ | À ¼ Œ Æ Y » ‚ ¿ ³ Ý Y Ë « Y Ì] ¬ Ê Â Á » ¾ M “

. d ‡ Ÿ Ä ½ M « Á µ Y Ò ¼ Â ¾ Ë M Ý ‡ Y { Y 1 e

. | Ì ^ Ë Â À Y { µ Â ³ { Y Á Ä «] Ë Ã Ì Ä ³ € Æ Á ‹ Þ

. | Ì ^ Ë Ã Ä • ¿ z Œ • Ä Ë » Ô Ÿ Å Ó Y [Y ‡ • Ì Ä » Ä À Ä Ó Ì Ä æ y € Ë { 3

. | Ë Æ ¼ Ä Ì Á Ä œ u Ô Ì Å | ¿ Y • Ã] € µ » Â Ä ´ { ¿ € f ‡ { { Y { • Â Ä » Ä • » Ê Ì Ä ¿ € 4 »

. d ‡ Y Ä ¡ | » × Æ ^ , Ä • » Ì] Æ Ê ‡ | À [Æ ^ » ¾ Ì ‹ Ã { Z - 5 f ‡ Y

. d ^ Ì ¿ Ä ¡ | » À Ä Ì ¶ ° ‹ € Ä Ì - Å Ä ¿ Æ Ì ¼ Å ¸ M — Ÿ » Æ Ä µ Å Á | • Ã { Z - 6 f ‡ Y

. | Ì Å ¶ [Ë Â Ã Ä Â Ì Â X Ä ½ Â » Á Ã Ì ¶ ^ ¼ ½ M . { Â Ê » [Â ^ v ¦ » ¸ z (¾ ‹ Æ Ì ‰ Â) » Ã Ÿ € ¾ ¨ ³ ¿ ef ‹ Ã Ÿ € ½ Â Å Ä Ì Å

. | ‹ | Å Y Â Ô Ã Ì Ÿ Ì Y » { € Ä Y { Á ½ Y Â ¾ • Ë Ì Ÿ Ì 8 f ¿

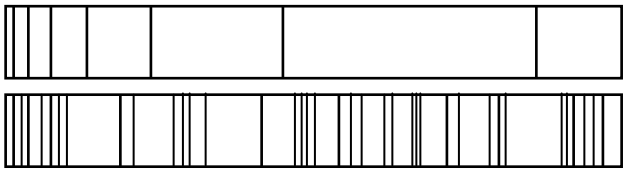
. d ‡ Ÿ ¿ Ô » ½ Y • Ã Ä ¿ M Ê { ¼ ¸ Ÿ ‡ Š Ë Y É Ÿ Y €] ¬ Á Ä m d Á Ž Z Ë ½ • Á [Z] Æ Ë Ô Ì Ÿ Ì ¾ Ê Ì Ÿ j ° e

Ê ¬ · ‚Ì ÿ » ‡ Ž Ž Ë Y € Ë Á

G	ثابت جهانی گرانش	$6/67\times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$
c	سرعت نور	$3\times 10^8 ms^{-1}$
pc	پارسک	$3/09\times 10^{16} m$
Au	واحد نجومی	$1/50\times 10^{11} m$
Ly	سال نوری	$9/46\times 10^{15} m$
$R_\odot$	شعاع خورشید	$6/96\times 10^8 m$
$R_\oplus$	شعاع زمین	$6/38\times 10^6 m$
	شعاع ماه	$1/74\times 10^6 m$
	شعاع مداری ماه	$3/84\times 10^8 m$
$M_\oplus$	جرم زمین	$5/97\times 10^{24} kg$
$T_\odot$	دمای خورشید	$5777 K$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	$3/85\times 10^{26} W$
	ثابت خورشیدی	$1/37\times 10^3 Wm^{-2}$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید	$-26/8$
$H_\circ$	ثابت هابل	$70 Km\,s^{-1} Mpc^{-1}$

Downloaded from: www.icosmo.ir

1) الف) اگر بیشینه تابش در طیف ستاره‌ی A در طول موج 290 نانومتر و بیشینه تابش در طیف ستاره‌ی B در طول موج 870 نانومتر رصد شده باشد، مشخص کنید که طیف‌های 1و2 به ترتیب متعلق به کدام یک از ستاره‌های A و B است.



طیف	1	2
ستاره		

ب) طیف جذبی 1 دارای بیشترین و تاریک‌ترین خطوط جذبی هیدروژن نسبت به تمامی گونه‌های طیفی است. اگر فرض کنیم هر دو ستاره‌ی A و B در مرحله‌ی هیدروژن سوزی در هسته باشند. مکان دو ستاره را در شکل زیر مشخص کنید.

Downloaded from: www.icosmo.ir

پ) نسبت جرم ستاره‌ی A به ستاره‌ی B چقدر است؟

2) یک ایستگاه فضایی در مداری دایروی با دوره تناوب T و شعاع R به دور زمین در گردش است. در یک حرکت نمایشی، فضانوردی قصد دارد با پرش از ایستگاه، طی یک حرکت در فضا مسیری را آزادانه (بدون استفاده از نیروی پیشرانش و یا...) طی کرده و دوباره به ایستگاه برگردد. مسیر طی شده‌ی وی در فضا در شکل زیر نشان داده شده است. (شکل به مقیاس نیست) مسیر هم‌صفحه با مدار ایستگاه فضایی و همچنین مسیر، نسبت به خط میانی متقارن است. (زاویه جدا شدن از ایستگاه و ورود به ایستگاه برابر است) مساحت قسمت رنگی در شکل $\pi R^2 / 30$ و زمان این مانور $T / 6$ است.

Ê ¬ · Ż ŷ » x Z ‡ Ŧ Z Á Š Ë Y € Ë Á

Downloaded from: www.icosmo.ir

الف) خروج از مرکز مدار فضانورد را حساب کنید.

ب) نسبت نیم‌محور بزرگ مدار فضانورد، (a) به R را محاسبه کنید.

پ) هنگامی که فضانورد و ایستگاه هر دو به خط تقارن مانور می‌رسند، اندازه سرعت فضانورد نسبت به ایســـتگاه را بر حسب T و R بدست آورید.

β سفینه‌ی فضایی به جرم 25 کیلوگرم در کاوش‌های خارج از منظومه‌ی شمسی خود با یک ستاره‌ی غول سرخ مواجه می‌شود. جرم غول برابر جرم خورشید و درخشندگی آن 1000 برابر درخشندگی خورشید است. حرکت سفینه در یک خط مستقیم به سمت مرکز غول است و تحت گرانش آن به سویش سقوط می‌کند. هنگامی که سفینه به نزدیکی غول رسید، دما و حرارت بالا باعث روشن شدن علائم هشدار در سفینه می‌شود و سفینه بادبان‌های نوری خود را باز می‌کند. این بادبان‌ها تحت تأثیر فشار تابشی، بر نیروی گرانش غول غلبه کرده و سفینه از غول فاصله می‌گیرد. فاصله‌ی سفینه از مرکز غول، (D) برحسب زمان t در نمودار ثبت شده است. بادبان‌ها نور را به صورت آینه‌ای دریافت و بازتاب می‌کنند و صفحه بادبان‌ها بر راستای تابش غول و راستای حرکت عمود است. در حل مسئله تنها نیروهای گرانش غول و فشار تابشی بر بادبان‌ها بعد از باز شدنشان را در نظر بگیرید و از تأثیرات جو غول و اثرات مغناطیسی و... صرف‌نظر کنید. با استفاده از نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید.

این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد

جرم خورشید $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} kg$ است.

ثابت جهانی گرانش $G = 6/67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ است.

درخشندگی خورشید $L_{\odot} = 3/85 \times 10^{26} W$ است.

سرعت نور $c = 3 \times 10^{8} m.s^{-1}$ است.

Ê ¬ · Ż ŷ » x Z ‡ Ŧ Z Á Š Ë Y € Ë Á

Downloaded from: www.icosmo.ir

الف) سفینه در چه زمانی بادبان‌های خود را باز کرده است؟ برای پاسخ خود استدلال کافی بیاورید.
ب) مساحت بادبان‌های سفینه چند متر مربع است؟

4) ناظری در شهری با عرض جغرافیایی ϕ (شمالی) زندگی می‌کند. کم‌ترین طول دایره‌البروجیِ نقطه‌ای از آسمان که در سمت‌الرأس ناظر قرار دارد، چقدر است؟ (ε زاویه‌ی بین دایره‌البروج و استوای سماوی است.)
الف) در حالتی که $\phi < 90 - \varepsilon$ ب) در حالتی که $\phi > 90 - \varepsilon$

5) سرعت رصدی اجرام کیهانی برابر است با مجموع سرعت جریان هابلی $v = H_\circ r$ و مؤلفه‌ی سرعت خاصه در امتداد خط دید که به واسطه اثرات گرانشی موضعی پدید می‌آید.
این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد.
ثابت هابل $H_\circ = 72 km\,s^{-1} Mpc^{-1}$ است.
سرعت نور $c = 3\times 10^8 m.s^{-1}$ است.
الف) فرض کنید می‌خواهیم ثابت هابل را با اندازه گرفتن فاصله و انتقال به سرخ یک جرم منفرد در کیهان موضعی تخمین بزنیم. ثابت هابل چگونه به سرعت خاصه این جرم مربوط می‌شود؟
ب) اگر مقدار مؤلفه‌ی در امتداد خط دیدِ سرعتِ خاصه برابر با $600 km/s$ باشد در چه فاصله‌ای درصد خطای نسبی در اندازه‌گیری ثابت هابل 5% می‌شود؟
پ) اگر این جرم در انتقال به سرخ $z = 0/04$ قرار داشته باشد، در حضور سرعت خاصه ذکر شده در قسمت قبل میزان تغییر در انتقال به سرخ ناشی از انبساط هابلی چقدر است؟

Ê ¬ · Ż ŷ » x Z ‡ Ŧ Z Á Š Ë Y € Ë Á

6 عکس زیر از ناحیه‌ای از آسمان است که خوشه‌ای از کهکشان‌ها را نشان می‌دهد. این خوشه 62 میلیون سال نوری از زمین فاصله دارد. خوشه‌ی کهکشان‌ها مجموعه‌ای از کهکشان‌ها است که با یکدیگر برهم‌کنش گرانشی مستقیم دارند. مساحت این عکس برابر مساحت خوشه و مساوی 47×47 است.

Downloaded from: www.icosmo.ir

همان‌طور که مشاهده می‌کنید این عکس به $20 \times 20 = 400$ ناحیه تقسیم شده است. بدین ترتیب می‌توان به هر نقطه از این عکس یک مختصات نسبت داد. مختصات گوشه‌ی چپ-پایین در این عکس $(0,0)$ است. مکان 10 کهکشان از اعضای این خوشه در عکس مشخص شده است. جدولی که در ادامه آمده است، مشخصات این 10 کهکشان را نشان می‌دهد. ستون اول جدول، شماره‌ی کهکشانی را که در عکس آمده است را تعیین می‌کند. ستون دوم و سوم مختصات کهکشان را نشان می‌دهد. ستون چهارم نسبت جرم (M) به درخشندگی در فیلتر آبی (L_B) هر کهکشان را بر حسب واحدهای خورشیدی تعیین می‌کند. یعنی برای خورشید داریم $M / L_B = 1$. ستون آخر نیز قدر ظاهری هر کهکشان را در فیلتر آبی (B) را نشان می‌دهد.

Ê ¬ · Ž ì ý » x Z ‡ Ŧ Z Á Š Ë Y € Ë Á

شماره‌ی کهکشان	X	Y	M/L_B	B
1	10/53	18/58	7/23	19/01
2	8/21	9/93	8/9	17/91
3	1/24	12/25	7/4	14/79
4	17/27	15/79	6/9	15/88
5	13/03	7/26	4/5	10/24
6	5/95	10/94	5/1	8/81
7	6/47	11/91	9/3	9/68
8	9/23	15/08	10/0	11/96
9	10/83	13/38	3/4	13/82
10	8/55	11/53	5/7	11/36

این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد.

قدر مطلق خورشید در فیلتر آبی 5/47 است.

یک واحد نجومی $1/5 \times 10^{11}$ متر است.

یک پارسک 206265 واحد نجومی است.

الف) با توضیح مختصر و انجام محاسبات لازم، مختصات مرکز جرم خوشه را بدست آورید و مکان آن را در عکس با علامت (+) مشخص کنید.

ب) اگر این 10 کهکشان، تنها 10 درصد از کل درخشندگی خوشه را (در فیلتر آبی) تولید کنند، قدر یک ثانیه‌ی قوسی مربع از این خوشه را در فیلتر آبی محاسبه کنید.

۷) اسطرلاب یک ابزار نجومی قدیمی است که به‌وسیله‌ی آن می‌توان در هر لحظه سمت و ارتفاع ستاره‌ها را برای یک ناظر بیابیم. طی قرن‌ها و اعصار گذشته، منجمان به نوشتن کتاب‌ها و مقالات فراوانی در زمینه‌ی آن پرداخته‌اند. به عنوان نمونه می‌توانیم به کتاب «التفهیم» از ابوریحان بیرونی اشاره کرد که فصلی از آن به توضیح و توصیف اسطرلاب و اجزای آن اختصاص یافته است. علاوه بر نوشتن این کتب، برخی از منجمان به تکمیل اسطرلاب‌ها و افزودن قابلیت‌های تازه به آن‌ها می‌پرداختند و انواع تازه‌ای از اسطرلاب را می‌ساختند. مثلاً ابوریحان بیرونی وقتی به اُسطرلاب‌های مختلف اشاره می‌کند، از اسطرلابی به نام «زورقی» نام می‌برد که توسط ابوسعید سجزی ساخته شده و بر مبنای چرخش زمین است. در یک حالت ساده، ساختن یک اسطرلاب وسیلهٔ دو صفحه (در واقع دو دایره) امکان پذیر است.

صفحه‌ی 1: این صفحه به صورت یک طلق در بسته‌ی سؤالات قرار گرفته است و همان‌طور که مشاهده می‌کنید از دایره‌ای که محیط آن بر حسب ساعات شبانه‌روز درجه‌بندی شده، تشکیل شده است. درون آن هم در واقع نقشه‌ای از ستاره‌ها و صورت‌های فلکی، قابل مشاهده هستند. ضمناً برای سهولت کار دایره‌البروج نیز رسم شده که در تصویر مشخص شده است.

Downloaded from: www.icosmo.ir

Ê ¬ · Ż ỳ » ẋ Ż ‡ Ŧ Ż Á Š Ë Y € Ë Á

صفحه‌ی 2: این صفحه مشخص کننده‌ی سمت و ارتفاع برای ناظری در شهر تهران است و محیط آن به صورتی درجه‌بندی شده است که روزهای سال را نمایش می‌دهد. خم مربوط به افق ناظر را درون این صفحه مشاهده می‌کنید. پس از خمِ مربوط به اُفق، خم‌هایی مشخص شده است که در واقع دوایر هم ارتفاع هستند و نشان دهنده‌ی ارتفاع‌های صفر تا90 درجه (به صورت 10 درجه، 10 درجه) است. در نهایت، مرکز این دوایر به نقطه‌ای ختم شده است که نشان دهنده‌ی سمت‌الرأس ناظر است. خم‌های دیگری که از سمت‌الرأس خارج شده‌اند، خم‌های هم سمت هستند و سمت شرقی و غربی را از صفر تا180 درجه (به صورت15 درجه، 15 درجه) مشخص کرده‌اند. نقطه‌ی سفیدی که در سمت صفر درجه و ارتفاع 36° قرار دارد، نشانگر قطب شمال سماوی است.

نحوه‌ی استفاده: مرکز این دو صفحه را بر روی هم قرار دهید. به طوری که ستاره‌ی قطبیِ صفحه‌ی 1، در مکان صحیحش در صفحه‌ی 2 قرار بگیرد. با چرخاندن این صفحه‌ها بر روی یکدیگر می‌توانید زمانی که مد نظر دارید را تنظیم کنید. مثلاً اگر قرار است اسطرلاب را برای ساعت10شب در روز اول فروردین تنظیم کنید باید صفحات را به نحوی بر روی هم قرار دهید که ساعت22 از صفحه‌ی 1 بر روی 1 فرودین از صفحه‌ی 2 منطبق شود. سپس با توجه به محل قرار گیری هر ستاره در صفحه‌ی 2، می‌توانید سمت و ارتفاع آن را بیابید.

اکنون با استفاده از اسطرلابی که دارید به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) پنج صورت فلکی که تماماً در نیمکره‌ی شمالی دایره‌البروج قرار دارند را نام ببرید. (این صورت‌های فلکی باید در نقشه موجود باشند.)

ب) سه صورت فلکی که در اول اسفند ماه ساعت10 شب، تمامی ستاره‌هایشان ارتفاعی بیش از30 درجه دارند را نام ببرید. (این صورت‌های فلکی باید در نقشه موجود باشند.)

پ) در ساعت 8 شب چه روزی از سال ستاره‌ی دِنب از نصف‌النهار ناظر عبور می‌کند؟

ت) ارتفاع نسرطائر وقتی که سمت آن از دید ناظر120 درجه است، چقدر خواهد بود؟

ث) ناظری در فصل تابستان، خورشید را با ارتفاع 10° و سمت 80° مشاهده می‌کند. در این هنگام، خورشید در کنار کدام ستاره‌ی پرنور آسمان قرار دارد؟

Downloaded from: www.icosmo.ir

Ê ¬ · Ż ŷ » x Z ‡ Ŧ Z Á Š Ë Y € Ë Á

این صفحه و صفحه‌ی بعد را از دفترچه‌ی سؤالات خود جدا نموده و دقت کنید که بر روی آن پاسخی ننویسید. در پایان آزمون، می‌توانید این دو صفحه را همراه خود ببرید.[1]

1 Ä v ¨ •

Downloaded from: www.icosmo.ir

[1] طراحی و محاسبه‌ی اسطرلاب از سید امیرسادات موسوی.

Ê ¬ · Ì ý » ¤ Ŧ ŽÁŠ Ë Y € Ë Á

2 Ä v ¨ •

Downloaded from: www.icosmo.ir

1) الف) با توجه به قانون وین داریم: $\lambda_{max}T = 0/0029$ با جایگذاری طول موج‌های 290 و 870 نانومتر برای ستاره‌های A و B داریم: $T_A = 10^4$ و $T_B = 3/3\times10^3$. پس ستاره‌ی A داغ‌تر است. از طرف دیگر می‌دانیم که هر چه دمای ستاره‌ای پایین‌تر باشد، فراوانی خطوط جذبی مولکولی در طیف ستاره بیشتر می‌شود. پس طیف 2 متعلق به ستاره‌ی B و طیف 1 متعلق به ستاره‌ی A است.

ب) خطوط جذبی هیدروژن در طیف ستاره‌های گونه‌ی O و B قوی‌تر می‌شود؛ پس ستاره‌ی A از گونه‌ی طیفی O یا B است؛ اما جای دقیق‌تر ستاره از روی نمودار را می‌توان با توجه به محور دما که در بالای نمودار ذیل رسم شده است، تعیین نمود (از آنجا که هر دو ستاره در مرحله‌ی هیدروژن سوزی قرار دارند، هر دو ستاره روی رشته‌ی اصلی قرار می‌گیرند).



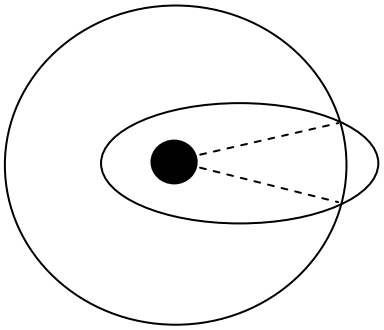
پ) از روی نمودار قدر مطلق ستاره‌های A و B به ترتیب برابر 0 و +6 سنجیده می‌شود. حال می‌توانیم بنویسیم:

$$M_A - M_B = -2/5\log\frac{L_A}{L_B} \quad , \quad M_A = 0 \quad , \quad M_B = +6$$

در نتیجه داریم: $\frac{L_A}{L_B} = 251$. از طرفی می‌دانستیم: $\frac{L_A}{L_B} = (\frac{M_A}{M_B})^{3/5}$ پس با جایگذاری این مقدار می‌توانیم بنویسیم:

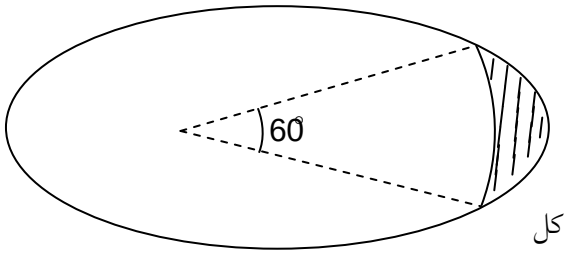
$$\frac{M_A}{M_B} = 0/28$$

2) الف) مرکز جرم مدارِ سفینه و فضانورد، مرکز زمین است. پس هر دو در مدارهایی مطابق شکل روبرو حرکت می‌کنند. اما مطابق شکل روبرو و با توجه به اینکه زاویه‌ی بین دو خط نقطه‌چین برابر یک ششم دوره تناوب است؛ زاویه‌ی بین دو خط $60^\circ = 6 \div 360^\circ$ است. حال برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی بین دو خط نقطه‌چین روی مدار بیضی را چنین محاسبه می‌کنیم:



Downloaded from: www.icosmo.ir

مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده بعلاوه‌ی مساحت بین دو خط نقطه‌چین



که قطاع یک ششمی از مساحت دایره است؛ چنین می‌شود:

$$S_{\text{نقطه‌چین}} = \frac{60\pi R^2}{360} + \frac{\pi R^2}{30} = \frac{\pi R^2}{6} + \frac{\pi R^2}{30} = \frac{\pi R^2}{5}$$

از آنجا که این مساحت ظرف مدت $T / 6$ جاروب می‌شود و مساحت کل بیضی برابر است با πab؛ می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\begin{array}{cc} T / 6 & \pi R^2 / 5 \\ x & \pi ab \end{array}$$

در نتیجه: $x = \pi ab \frac{T}{6} \times \frac{5}{\pi R^2} = \frac{5}{6} T \frac{ab}{R^2}$ که در آن x تناوب کل مدار است.

حال نوبت به محاسبه‌ی شعاع r در بیضی می‌رسد؛ از آنجا که شعاع بیضی برحسب زاویه نسبت به نیم‌قطر اطول، برابر است با:

$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ و در این حالت $\theta = 180 - 30 = 150^\circ$ پس:

$$R = \frac{2a(1-e^2)}{2-\sqrt{3}e} \qquad (*)$$

از طرف دیگر، طبق قانون سوم کپلر داریم: $(\frac{P_1}{P_2})^2 = (\frac{a_1}{a_2})^3$ و از آنجا که در این سامانه هر دو جسم به دور زمین می‌گردند و دوره تناوب دومی برابر T و شعاع مداری‌اش برابر R است و دوره تناوب جسم اول برابر است با $\frac{5}{6} T \frac{ab}{R^2}$ که نیم قطر اطول مدارش برابر است با a. حال اگر این مقدار را در قانون کپلر جایگزین کنیم؛ داریم:

$$(\frac{\frac{25}{36} T \frac{ab}{R^2}}{T})^2 = (\frac{a}{R})^3 \Rightarrow \frac{25}{36}\frac{a^2b^2}{R^4} = \frac{a^3}{R^3} \Rightarrow \frac{25}{36}\frac{b^2}{R} = a$$

اگر مقدار R را از معادله‌ی (*) جایگزین کنیم داریم:

$$\frac{25}{36} b^2 \frac{2-\sqrt{3}e}{2a(1-e^2)} = a \Rightarrow (\frac{b}{a})^2 = \frac{72}{25}\frac{1-e^2}{2-\sqrt{3}e} \quad , \quad e = \sqrt{1-(\frac{b}{a})^2} \Rightarrow e^2 = \frac{2-\sqrt{3}e - 2 + 88/25 e^2}{2-\sqrt{3}e} \Rightarrow$$

$$2e^2 - \sqrt{3}e^3 - 2 + \sqrt{3}e + 2 - 88/25 e^2 = 0 \Rightarrow -e^2(\sqrt{3}e + 0/88) - (\sqrt{3}e + 0/88) = 0$$

$$(\sqrt{3}e + 5/2)(1 - e^2) = 0 \Rightarrow e = \pm 1, \frac{-0/88}{\sqrt{3}}$$

توجه داشته باشید که در مقدار عددی خروج از مرکز، علامت مثبت یا منفی صرفاً نشان دهنده‌ی جهت قرارگیری بیضی روی دستگاه مختصات است و معنای دیگری ندارد.

Downloaded from: www.icosmo.ir

Ê ¬ · Ì ÿ » x Z ‡ Ŧ Z Á Š Ë Y € Ë Á

ب) برای محاسبه‌ی نسبت نیم‌محور بزرگ به R داریم: $R = \frac{2a(1-e^2)}{2-\sqrt{3}e}$ که در آن $e = \pm 1, \frac{-0/88}{\sqrt{3}}$ است. پس برای نسبت؛

$\frac{R}{a} = 0, 0/52$

پ) سرعت در مدار بیضوی از رابطه‌ی ذیل بدست می‌آید:

$$v = \sqrt{Gm(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})} = \sqrt{Gm(\frac{2(1+e\cos\theta)}{a(1-e^2)} - \frac{1}{a})}$$

و در لحظه‌ی مورد نظر $\theta = 180^\circ$ پس:

$$v = \sqrt{Gm(\frac{2(1+e)\cos 180}{a(1-e^2)} - \frac{1}{a})} = \sqrt{Gm(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a})}$$

و در مورد دایره:

$$V = \sqrt{\frac{Gm}{a}}$$

که پس از تقسیم داریم:

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\frac{(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a})}{\frac{1}{a}}} \quad , \quad e = \pm 1, \frac{-0/88}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \frac{v}{V} = 0, 1/26, \infty$$

3) الف) نقطه‌ای از خم که در آن جهت تقعر عوض می‌شود، نقطه‌ی عطف نام دارد. به طور کلی در نقطه‌ی عطف مشتق دوم معادله صفر می‌شود. عملاً نقطه‌ی عطف جایی از نمودار است که اثر کاهنده‌ی تعدادی از جملات، بر اثر افزاینده‌ی سایر جملات، غلبه می‌کند یا بالعکس. در این سوال نیز بلافاصله بعد از باز شدن بادبان‌ها خورشیدی، مؤلفه‌ای در جهت کاهش سرعت نزدیک شدن سفینه به خورشید، بر سرعت حرکت سفینه تأثیر می‌گذارد؛ پس برای پیدا کردن محل باز شدن بادبان‌ها، باید به دنبال نقطه‌ی عطف نمودار باشیم که تقریباً در مختصات زمانیِ $t = 3500$ و مکانیِ $2/91 \times 10^8 m$ این اتفاق می‌افتد. این اطلاعات را با نوشتن معادله‌ی نیروهای مؤثر و برابر صفر قرار دادن این معادله نیز بدست آورد.

ب) از آنجا که سفینه به صورت خطی به خورشید نزدیک می‌شده و بعد از مدتی، شروع به دور شدن از خورشید کرده؛ با توجه به نمودار دو احتمال برای حرکت سفینه متصور است. نخستین احتمال اینکه، بادبان‌های سفینه به قدری بزرگ است که بعد از صفر شدن سرعت، سفینه به اعماق فضا شلیک می‌شود؛ احتمال دوم هم، اینکه سفینه حرکتی نوسانی داشته باشد که این احتمال، خود نیز به دو زیر شاخه تقسیم می‌شود. اولی نوسانگر ساده بودن سفینه و دیگری، نوسان‌گر میرا بودن آن است. اگر نوسانگر ساده باشد، مسیر حرکت باید از رابطه‌ی $A\cos(\omega t + \omega_0)$ پیروی کند. یعنی مسیر باید بعد از لحظه‌ی باز شدن بادبان‌ها، نسبت به نقطه‌ی کمینه‌ی منحنی (سرعت صفر) متقارن باشد. اگر نمودار متقارن نباشد، نوسان‌گر میرا است؛ اما با بررسی نمودار

Downloaded from: www.icosmo.ir

و با توجه به اعدادی که برای زمان در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفته، به سادگی تقارن مسیر حرکت آشکار می‌شود؛ لذا متحرک، نوسان‌گر ساده است؛ پس می‌توانیم مانند فنر با آن برخورد کنیم و بنویسیم: $F_s = k\Delta x$

اگر فرض کنیم دو نیروی مؤثر دیگر بر سفینه، یکی ناشی از فشار تابشی و دیگری ناشی از سقوط گرانشی سفینه باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} F = \dfrac{GmM}{R^2} \\ F_{rad} = \dfrac{\langle S \rangle A}{c}\cos\theta \end{array}\right\},\ F - F_{rad} = F_s \qquad (*)$$

که در این معادله، می‌توانیم به ازای هر نقطه‌ی دلخواهی از مسیر معادله را بررسی کنیم که برای سادگی کار، جسم را در نقطه‌ی تعادل در نظر می‌گیریم تا $\Delta x = 0$ و در نتیجه $F_s = 0$ شود؛ علاوه بر این، در معادله‌ی (*)، A مساحت سطح جذب کننده است، در اینجا به علت سقوط عمودی سفینه روی خورشید، زاویه‌ی θ را برابر صفر در نظر می‌گیریم، S نیز روشنایی رسیده به سطح در فاصله‌ی ناظر است؛ جرم سفینه هم 25 کیلوگرم است، درخشندگی ستاره هم 1000 برابر درخشندگی خورشید و جرم ستاره، برابر جرم خورشید است؛ بنابراین می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{GmM}{R^2} = \frac{(\frac{1000L_\odot}{4\pi R_1^2})A}{c} \Rightarrow A = \frac{4GmM_\odot\pi c}{1000L_\odot} \Rightarrow$$

$$A = \frac{4\times 6/67\times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}\times 2\times 10^{30} kg\times 25\times \pi\times 3\times 10^8 m.s^{-1}}{1000\times 3/85\times 10^{26} W} \simeq 32/6 m^2$$

4) می‌دانیم میل ستاره‌ای که از سمت‌الرأس می‌گذرد، با عرض‌جغرافیایی ناظر برابر است، پس $\phi = \delta$. حال می‌توانیم شروط مسئله را بدین شکل بازنویسی کنیم:

الف) $90 - \delta > \varepsilon$

ب) $90 - \delta < \varepsilon$

Downloaded from: www.icosmo.ir

Ê ¬ · Ż ŷ » x Z ‡ F Z Á Š Ë Y € Ë Á

حال کره‌ی سماوی را برای دو دستگاه مختصات (دایره‌البروجی - بعد و میلی) رسم می‌کنیم. خط قرمز نشان‌دهنده‌ی مجموعه ستاره‌هایی‌ست که در شرط الف صدق می‌کنند بدیهی است که چنین ستاره‌هایی می‌توانند به ازای مقادیر مختلف بعد، تمامی مقادیر ممکن برای طول دایره‌البروجی را اتخاذ کنند و کم‌ترین مقدار طول هم صفر خواهد بود. اما در مورد قسمت ب موضوع کمی فرق می‌کند.

(برای ساده‌سازی و درک بهتر و شهودی سؤال می‌توانستید سوال را با این پرسش معروف که: «بیشترین مقدار سمت ستارهای با میل معلوم را بدست آورید» متناظر قرار دهید.)

در این حالت K,P جای خود را به P,Z می‌دادند و قسمت ب هم شبیه به استخراج بیشینه سمت ستاره‌هایی که در عبور بالایی از شمال سمت‌الرأس می‌گذشتند، می‌شد. برای حل این سؤال کمانی را بر مسیر حرکت ظاهری ستاره مماس می‌کردیم و اثبات کرده بودیم که ستاره در جایی به بیشترین سمت می‌رسد که محور ارتفاع بر محور میل عمود گردد. «این موضوع، هم به صورت شهودی قابل اثبات است هم با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در مثلث PZS برحسب زاویه‌ی رأس Z؛ در این حالت تنها مقدار نامعلوم در طرف دیگر عبارت مقدار ارتفاع ستاره بود. آن هم با مشتق گرفتن بر حسب محور ارتفاع قابل استخراج بود (از مشتق برای بدست آوردن بیشینه عبارت جبری استفاده می‌کردیم).»

حال عبارت‌های جبری را برای مسئله‌ی مدّ نظر سؤال و در مثلث PKS بازنویسی می‌نماییم. با توجه به این نکته، PK برابر انحراف دایره‌البروج است، و این نکته که در حالت بیشینه‌ی طول دایره‌البروجی، PK بر KS عمود است؛ قضیه‌ی سینوس‌ها را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{\sin 90}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(90 - \lambda)}{\sin(90 - \delta)} \Rightarrow \cos\lambda = \frac{\cos\delta}{\sin\varepsilon}$$

از قبل و شکل اول به یاد داریم که در این مسئله، عرض جغرافیایی برابر میل است، پس در رابطه اخیر عرض را جایگذاری می‌کنیم: $\cos\lambda = \frac{\cos\varphi}{\sin\varepsilon}$

مؤلفه‌ی راستای دید

خاصه

مؤلفه‌ی عمود بر میدان دید

الف) $V_{obs} = \pm v_r + v_{H\circ}$ و از رابطه‌ی انتقال به سرخ داشتیم:

$zc \times 10^{-3} = \pm v_r + H_\circ r$ پس داریم: $v = H_\circ r$ و از طرف دیگر $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_\circ} = \frac{V_{obs}}{c} \Rightarrow V_{obs} = zc$

در نتیجه: $v_r = zc - H_\circ r$.

Downloaded from: www.icosmo.ir

Ê ¬ · Ż ŷ » x Z ‡ Ŧ Z Á Š Ë Y € Ë Á

ب) این سؤال ترجمه‌ی سؤال 2-2 از کتاب *An introduction to modern cosmology* نوشته‌ی اندرو لیدل است.

در تعریف انتقال به سرخ داریم:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emitted}}{\lambda_{obs}} = \frac{R_{obs} - R_{emitted}}{R_{obs}}$$

در نتیجه داریم: $1 + z = \frac{R_{emitted}}{R_{obs}}$ و خواسته‌ی سؤال از ما این است که در اندازه‌گیری فاصله 5 درصد خطا داشته باشیم، یعنی $z = 1 - 1/05 = \pm 0/05$ یا $\frac{1}{1/05} \simeq 1/05$ یا $\frac{1}{0/95}$ یا $0/95$ در نتیجه مقدار انتقال به سرخ برابر می‌شود با $\frac{R_{emitted}}{R_{obs}}$

از طرفی با دانستن سرعت ذاتیِ خود جسم در راستای میدان دید (یعنی $v_r = 600 km/s$)، می‌توانیم بنویسیم $zc = H_\circ r$ پس داریم:

$$r = \frac{v_r - zc}{H_\circ} = \frac{6\times 10^5 m.s^{-1} \pm 0/05 \times 3 \times 10^8 m.s^{-1}}{72000 m.s^{-1} Mpc^{-1}} = 216 Mpc \text{ یا } 200 Mpc$$

پ) $v_r = 600 km.s^{-1}$ و $V_{obs} = zc = 0/04 \times 3 \times 10^8 m.s^{-1} = 1 2 10 m.s^{-1}$، از طرف دیگر در قسمت (الف) به دست آوردیم که $V_{obs} = \pm v_r + H_\circ r$ پس داریم: $H_\circ r = 11400 m.s^{-1}$ یا $12600 m.s^{-1}$. همچنین می‌دانستیم که $zc = H_\circ r$. در نتیجه:

$$z = \frac{H_\circ r}{c} = \frac{11400 km/s}{3\times 10^5 km/s} \text{ یا } \frac{12600 km/s}{3\times 10^5 km/s} = 0/038 \text{ یا } 0/042$$

6) الف) از آنجا که فاصله‌ی بین اعضای منفرد خوشه‌های کهکشانی در برابر فاصله‌ی بسیار زیاد این خوشه‌ها تا ناظر زمینی، ناچیز است؛ به سادگی می‌توانیم همه‌ی کهکشان‌های این خوشه‌ها را در یک صفحه در نظر بگیریم، آن گاه در رابطه‌ی جرم-درخشندگی پارامتر فاصله حذف می‌شود و نسبت‌های درخشندگی‌ها بدست می‌آید. حال یکی از کهکشان‌ها را به عنوان معیار در نظر گرفته و درخشندگی باقی کهکشان‌ها را با آن مقایسه می‌کنیم:

$$B_2 - B_1 = -2/5 \log \frac{L_{B2}}{L_{B1}} \Rightarrow$$

$$\frac{L_{B2}}{L_{B1}} = 2/75 \;,\; \frac{L_{B3}}{L_{B1}} = 48/75 \;,\; \frac{L_{B4}}{L_{B1}} = 17\;86 \;,\; \frac{L_{B5}}{L_{B1}} = 3221 \;,\; \frac{L_{B6}}{L_{B1}} = 12022 \;,\; \frac{L_{B7}}{L_{B1}} = 5395$$

$$\frac{L_{B8}}{L_{B1}} = 660 \;,\; \frac{L_{B9}}{L_{B1}} = 119 \;,\; \frac{L_{B10}}{L_{B1}} = 1148$$

حال با مقایسه‌ی قدر مطلق خورشید (خورشید در یک پارسکی) با قدر ظاهری کهکشان 1 (در فیلتر آبی)، روشنایی کهکشان 1 را بدست آورده و سپس با توجه به دانستن فاصله‌ی خوشه‌ی کهکشانی، درخشندگی کهکشان 1 و بعد؛ درخشندگی هر یک از کهکشان‌ها را محاسبه می‌کنیم:

Downloaded from: www.icosmo.ir

Ê ¬ · ,Ì ÿ » x Z ‡ ŦZÁŠ Ë Y € Ë Á

$$B_\odot - B_1 = -2/5 \log \frac{b_\odot}{b_{B1}} \quad , \quad b = \frac{L}{4\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad 5/47 - 19/01 = -2/5 \log\left(\frac{\frac{L_\odot}{d_\odot^2}}{\frac{L_1}{d_1^2}}\right) \Rightarrow \frac{d_1^2 L_\odot}{d_\odot^2 L_1} = 2/6 \times 10^5$$

$$d_1 = 62 \times 10^6 ly = 62 \times 10^6 \times 3/26 = 2/02 \times 10^8 pc \quad \text{و} \quad d_\odot = 10 pc$$

پس از جایگذاری در عبارت بالا، نسبت درخشندگی کهکشان 1 به خورشید چنین می‌شود:

$$\frac{L_{B1}}{L_\odot} = 1/3 \times 10^7$$

با توجه به صورت سؤال و ستون چهارم جدول مقادیر $\frac{M/L_B}{M_\odot / L_{B\odot}}$ را داریم؛ پس مثلاً برای کهکشان 1 می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{M_i / L_{Bi}}{M_\odot / L_{B\odot}} = 7/23 \quad \text{و چون} \quad \frac{L_{B1}}{L_\odot} = 1/36 \times 10^7 \quad \text{پس داریم:} \quad \frac{M_1}{M_\odot} = 9/83 \times 10^7$$

با تکرار همین روند برای سایر کهکشان‌ها داریم:

$$\frac{L_{B2}}{L_\odot} = 3/5 \times 10^7 \quad , \quad \frac{L_{B3}}{L_\odot} = 6/3 \times 10^8, \quad \frac{L_{B4}}{L_\odot} = 2/3 \times 10^8, \quad \frac{L_{B5}}{L_\odot} = 4/1 \times 10^{10}, \quad \frac{L_{B6}}{L_\odot} = 1/5 \times 10^{11}$$

$$\frac{L_{B7}}{L_\odot} = 7 \times 10^{11} \quad , \quad \frac{L_{B8}}{L_\odot} = 8/5 \times 10^9, \quad \frac{L_{B9}}{L_\odot} = 1/5 \times 10^9, \quad \frac{L_{B10}}{L_\odot} = 1/5 \times 10^7$$

پس داریم:

$$\frac{M_2}{M_\odot} = 9/83 \times 10^8 \quad , \quad \frac{M_3}{M_\odot} = 4/6 \times 10^9, \quad \frac{M_4}{M_\odot} = 1/6 \times 10^9, \quad \frac{M_5}{M_\odot} = 1/8 \times 10^{11}, \quad \frac{M_6}{M_\odot} = 7/6 \times 10^{11}$$

$$\frac{M_7}{M_\odot} = 6/5 \times 10^{12} \quad , \quad \frac{M_8}{M_\odot} = 8/5 \times 10^{10}, \quad \frac{M_9}{M_\odot} = 5/1 \times 10^9, \quad \frac{M_{10}}{M_\odot} = 8/5 \times 10^{10}$$

برای محاسبه‌ی مرکز جرم از رابطه‌ی $M_{total} R_j = \sum M_x R_{xj}$, $M_{total} R_i = \sum M_x R_{xi}$ استفاده می‌کنیم:

$$M_{total} R_i = \sum M_x R_{xi} \Rightarrow R_i = \frac{\sum M_x R_{xi}}{M_{total}} = \sum \frac{M_x}{M_{total}} R_{xi}$$

و برای بدست آوردن جرم کل بر حسب جرم خورشید، جرم تمامی کهکشان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$M_{total} = M_1 + M_2 + \ldots + M_{10} = 1/7 \times 10^{12} M_\odot$$

Downloaded from: www.icosmo.ir

Ê ¬ · Ì ý » x Z ‡ Z Á Š Ë Y € Ë Á

پس:

$$R_i = \sum \frac{M_x R_{x\,i}}{1/7\times 10^{24} M_\odot} = \frac{1/26\times 10^{25} M_\odot}{1/7\times 10^{24} M_\odot} \simeq 7/45$$

$$R_j = \sum \frac{M_x R_{x\,j}}{1/7\times 10^{24} M_\odot} = \frac{1/8\times 10^{25} M_\odot}{1/7\times 10^{24} M_\odot} \simeq 10/81$$

☆

لذا مختصات مرکز جرم از این قرار است: $(7/45,\ 10/81)$

این نقطه را روی نمودار با علامت ستاره نشان داده‌ایم.

ب) مساحت این عکس برابر است با 47×47 و هر دقیقه 60 قوسی است؛ پس مساحت کل عکس برابر است با:

$47\times 47\times 60\times 60 = 7/9\times 10^6$ ثانیه‌ی قوسی مربع.

اما طبق گفته‌ی سؤال، 10 درصد درخشندگی کل خوشه برابر است با مجموع درخشندگی تک تک اعضای موجود در نمودار؛ پس داریم: $\frac{L_{total}}{L_\odot} = 3\times 10^{12}$. اما ما می‌خواهیم قدر $1/(7/9\times 10^6)$ از کل خوشه را حساب کنیم؛ پس درخشندگی این مساحت برابر می‌شود با: $3/7\times 10^5 L_\odot$

از اینجا و با مقایسه با خورشید قدر مطلق کهکشان را حساب می‌کنیم: $M_{total} - M_\odot = -2/5\log\frac{L_{total}}{L_\odot}$

پس $M_{total} - M_\odot = -2/5\log(3/7\times 10^5)\ ,\ M_\odot = 4/7 \Rightarrow M_{total} = -8$

حال باید قدر ظاهری این ناحیه را با استفاده از رابطه‌ی $m - M = 5\log d - 5$ حساب کنیم؛ که در آن d فاصله‌ی کهکشان بر حسب پارسک است؛ داریم:

$$d = 62\times 10^6 ly = 62\times 10^6\times 3\times 10^8\times 3600\times 24\times 365\times 1/206265\times 1/3\times 10^{16} = 1/8\times 10^7 pc$$

پس:

$$m = 5\log(1/8\times 10^7) - 5 = 22/8$$

۷) الف) دب‌اصغر، دب‌اکبر، تنین، عوا، اکلیل شمالی، جاثی، قیفاووس، ذات‌الکرسی، عقاب، فرس اعظم، مارافسای

ب) جبار، ثور، دوپیکر، سرطان، ارابه‌ران

پ) 21 مهر

ت) 60 درجه

ث) سماک اعزل

Downloaded from: www.icosmo.ir

Ê ¬ · Ì ý » x Z ‡ ŽÁŠ Ë Y € Ë Á