باسمه تعالی

تسطیح هم‌مساحت | Equal-area Projection

11 th IOAA Team
I.R. IRAN

یازدهمین تیم المپیاد جهانی نجوم و اختر فیزیک

عباس فروزان نژاد ، شایان عزیزی

(نویسنده) (بازنگری)

Downloaded from: www.icosmo.ir

Downloaded from: www.icosmo.ir

تسطیح هم‌مساحت

ابتدا جهت ایجاد هم‌زبانی یادآوری می‌کنیم که تسطیح، تبدیلی یک به یک از کره به صفحه است. توجه کنید لزومی ندارد یک تسطیح کل کره را تصویر کند؛ یعنی دامنه‌ی تسطیح می‌تواند تنها زیرمجموعه‌ای از کره باشد.

آنچه مورد بررسی ما خواهد بود، تسطیح هم‌مساحت (حافظ مساحت) است.

تسطیحی را هم‌مساحت می‌گوییم که تحت آن تسطیح، هر مساحت دلخواهی از کره با مساحتِ تصویر شده‌ی آن روی صفحه، تنها یک ضریب ثابت تفاوت داشته باشد.

تصور کنید ضابطه‌ی تسطیح به شکل زیر باشد:

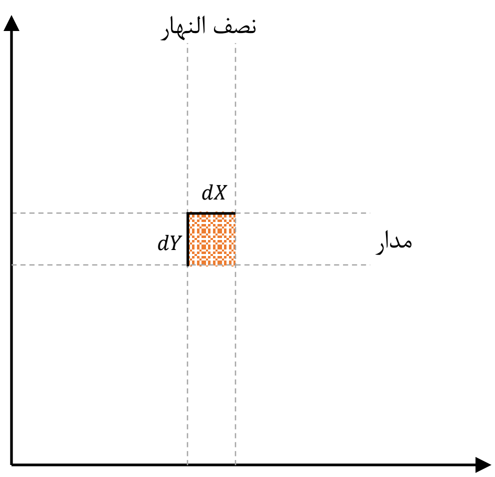
$$\begin{cases} x = X(\theta, \phi) \\ y = Y(\theta, \phi) \end{cases}$$

که در آن θ و ϕ مؤلفه‌های مختصات کروی می‌باشند. (θ زاویه با قطب و ϕ زاویه‌ی نصف‌النهار با نصف النهارِ مبدأ می‌باشد)

در ابتدا به‌عنوان یک مدل ساده می‌توان تصور کرد $\frac{\partial Y}{\partial \phi}, \frac{\partial X}{\partial \theta} = 0$؛ یعنی x تنها تابع ϕ و y تنها تابع θ باشد.

$$\begin{cases} x = X(\phi) \\ y = Y(\theta) \end{cases}$$

به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که تصویر نصف‌النهارها و مدارها به‌ترتیب خطوط موازی با محورهای y و x است. پس می‌توان المان مساحت را برابر $dx\ dy$ در نظر گرفت. (به شکل توجه کنید)



Downloaded from: www.icosmo.ir

المان مساحت روی کره نیز برابر $k\sin(\theta)\,d\theta\,d\phi$ است؛ پس داریم

$$k\sin\theta\ \ d\theta\ d\phi = dX\ dY$$

با توجه به این‌که ما در ابتدا فرض کردیم X تنها تابعی از ϕ است و Y نیز تنها تابعی از θ است می‌توان نوشت:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial \phi}\ d\phi\ \ , \qquad dY = \frac{\partial Y}{\partial \theta}\ d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{k\sin\theta = \frac{\partial X}{\partial \phi}\ \frac{\partial Y}{\partial \theta}}$$

جلوتر خواهیم دید که رابطه بالا حتی درصورتی که تنها یکی از فرض‌های $\frac{\partial X}{\partial \theta} = 0$ یا $\frac{\partial Y}{\partial \phi} = 0$ برقرار باشد به ما تسطیح هم‌مساحت می‌دهد.

میدانیم θ و ϕ مستقل از یکدیگر می‌باشند و در اینجا $\frac{\partial X}{\partial \phi}$ تنها تابع ϕ و $\frac{\partial Y}{\partial \theta}$ تنها تابع θ می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial X}{\partial \phi} = k_1\ \ ,\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} = k_2\sin\theta \qquad ;\quad k_1, k_2 = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k_1\,\phi \\ y = -k_2\cos\theta \end{cases}$$

توجه کنید برای اینکه نقشه مطلوب ما باشد باید ثابت k_2 منفی باشد تا y بر حسب θ تابعی نزولی باشد.

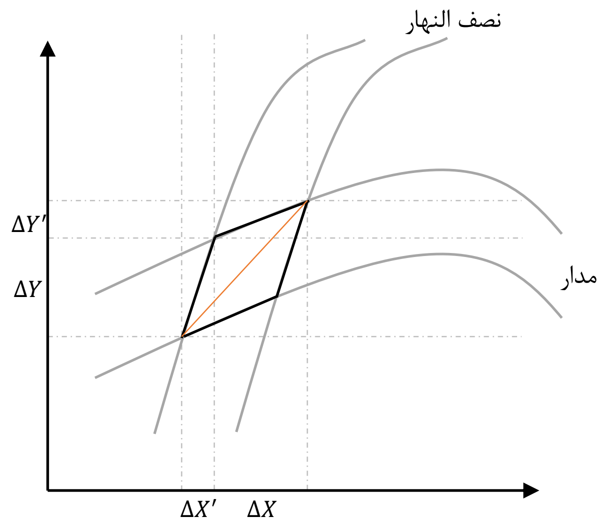
اکنون به سراغ حالت کلیِ مسئله می‌رویم. تصور کنید که ضابطه‌ی تسطیح به شکل زیر باشد.

$$\begin{cases} x = X(\theta,\phi) \\ y = Y(\theta,\phi) \end{cases}$$

این بدین معنی است که نصف النهارها و مدارها لزوماً خطوط راست نیستند و یک المانِ مساحتِ تصویر شده‌ی نوعی (که از θ تا $\theta+\Delta\theta$ و از ϕ تا $\phi+\Delta\phi$ گسترده شده است) تا مرتبه‌ی

Downloaded from: www.icosmo.ir

اولِ $\Delta\theta$ و $\Delta\phi$ ، بجای مستطیل به شکل متوازی‌الاضلاع است. (مراتب بالاتر زودتر به صفر میل می‌کنند)



در شکل بالا مساحت المان برابر است با

$$A = 2 \times \left(\frac{1}{2}(\Delta X + \Delta X')(\Delta Y + \Delta Y') - \frac{1}{2}\Delta Y \Delta X' - \frac{1}{2}\Delta Y' \Delta X - \Delta X' \Delta Y'\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \Delta X\, \Delta Y - \Delta X'\, \Delta Y'$$

اکنون کافی است تا ΔX، $\Delta X'$، ΔY و $\Delta Y'$ را بیابیم. نصف النهار، «منحنیِ ϕ ثابت» می‌باشد و ΔY تغییرات تابع $Y(\theta, \phi)$ را روی این منحنی به ما می‌دهد. پس با توجه به مفهوم مشتق جزئی داریم

$$\Delta Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)_\phi \Delta\theta$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت

$$\Delta X = \left(\frac{\partial X}{\partial \phi}\right)_\theta \Delta\phi \;, \qquad \Delta Y' = \left(\frac{\partial Y}{\partial \phi}\right)_\theta \Delta\phi \;, \qquad \Delta X' = \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)_\phi \Delta\theta$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\,\frac{\partial X}{\partial \phi} - \frac{\partial Y}{\partial \phi}\,\frac{\partial X}{\partial \theta}\right) \Delta\phi\, \Delta\theta$$

رابطه‌ی بالا را می‌توانیم به‌صورت دیفرانسیلی بیان کنیم.

$$d^2A = \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\,\frac{\partial X}{\partial \phi} - \frac{\partial Y}{\partial \phi}\,\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)\,d\phi\,d\theta$$

المان مساحت بر روی کره نیز برابر $k \sin\theta\ \ d\theta\ d\phi$ می‌باشد. پس رابطه‌ی اساسی تسطیحِ هم‌مساحت به شکل زیر می‌باشد.

$$\boxed{\frac{\partial Y}{\partial \theta}\frac{\partial X}{\partial \phi} - \frac{\partial Y}{\partial \phi}\frac{\partial X}{\partial \theta} = k \sin\theta}$$

توجه کنید تنها کافی است یکی از مقادیر $\frac{\partial X}{\partial \theta}$ یا $\frac{\partial Y}{\partial \phi}$ برابر صفر باشد تا به رابطه‌ی ابتدایی (همان رابطه‌ی حالت خاص) برسیم. این رابطه را هم‌چنین می‌توان در دستگاه قطبی به‌دست آورد.
(میتوانید به عنوان تمرین، همین مراحل را در دستگاه مختصات قطبی طی نموده و به رابطه‌ی زیر برسید)

$$\boxed{r\,\frac{\partial r}{\partial \theta}\,\frac{\partial \psi}{\partial \phi} - r\,\frac{\partial r}{\partial \phi}\,\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = k \sin\theta}$$

که در آن (r, ψ) مؤلفه‌های مختصات قطبی می‌باشند. توجه کنید ثابت k یک ثابت مثبت است و هیچ‌گاه نمی‌تواند منفی باشد.

از روابطی که در بالا بدست آمد، میتوان تسطیح‌های بسیار جالبی را بدست آوردن که از جمله‌ی آنان میتوان به مواردی که جلوتر آمده اشاره کرد.

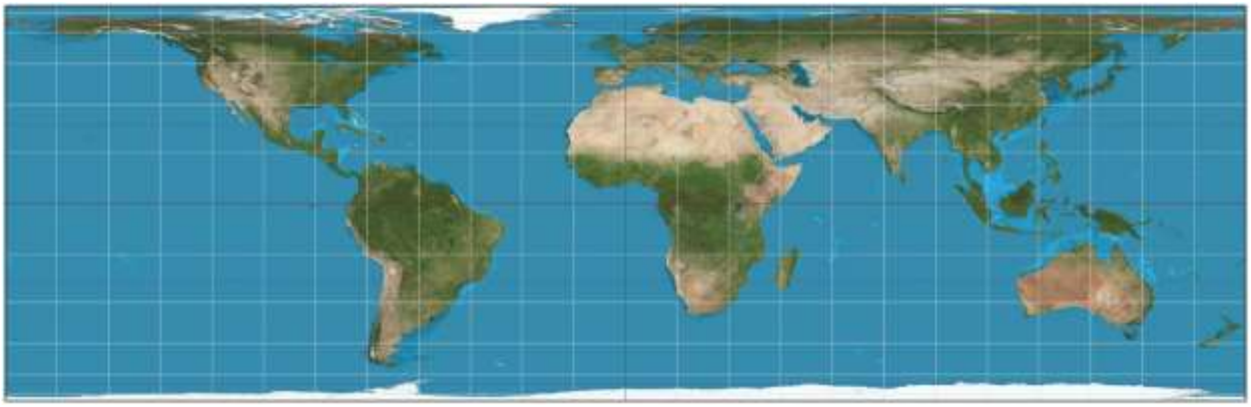
توجه کنید زین پس غالبا بجای استفاده از مؤلفه‌های دستگاه مختصات کروی (θ و ϕ) از طول جغرافیایی ℓ و عرض جغرافیایی φ استفاده شده است. ($\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta\ ,\ \ \ell = \phi$)

اکنون به معرفی برخی تسطیح‌های هم‌مساحتِ معروف میپردازیم.

Downloaded from: www.icosmo.ir

Downloaded from: www.icosmo.ir

تسطیح استوانه‌ای لامبرت (Lambert cylindrical equal-area projection)

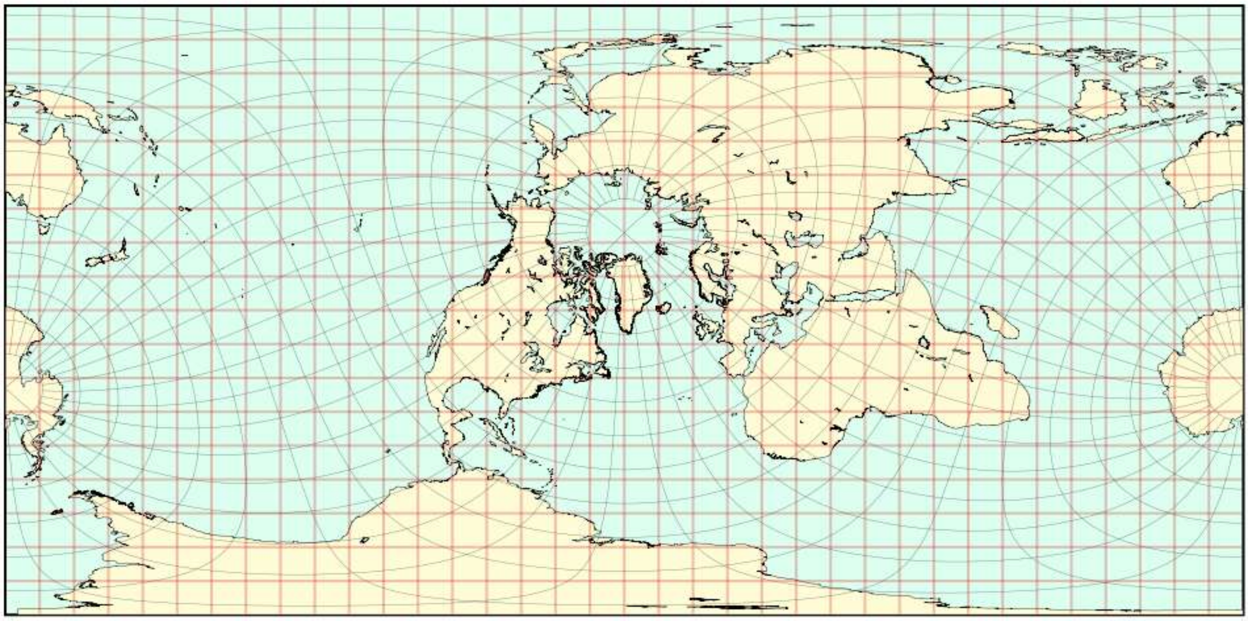


در این تسطیح برای به‌دست آوردن نقشه، ابتدا یک استوانه به شعاع دلخواه درنظر می‌گیریم که محور آن منطبق بر محور شمال-جنوب جغرافیایی زمین باشد؛ سپس از محور استوانه به هر نقطه‌ی زمین وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا استوانه را قطع کند. با باز کردن استوانه می‌توان به یک نقشه‌ی مسطح رسید. اگر شعاع استوانه و زمین هردو واحد در نظر گرفته شوند ضابطه‌ی این تسطیح به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} x = \ell \\ y = \sin\varphi \end{cases}$$

در این تسطیح، دوایر عظیمه و هم‌چنین دوایر صغیره منحنی‌هایی نوسانی شبیه به منحنی‌های مثلثاتی می‌باشند، البته به‌جز مدارها و نصف النهارها که در این تسطیح، به صورت خطوط افقی و عمودی درمی‌آیند.

اکنون به نقشه زیر توجه کنید.

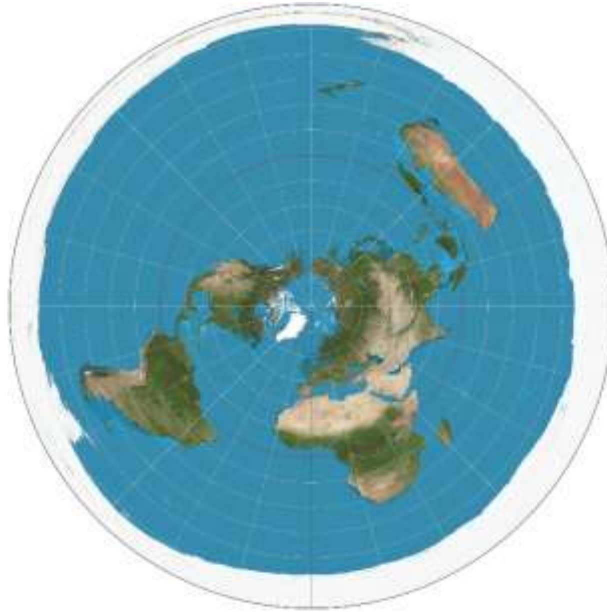


در این نقشه مدارها و نصف‌النهارها رسم شده‌اند؛ این تسطیح با این تفاوت انجام شده که محور استوانه موازی با محور شمال-جنوب جغرافیایی زمین نبوده است اما محور استوانه از مرکز زمین عبور می‌کند.

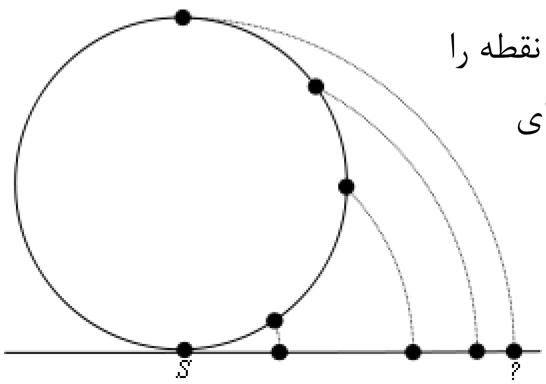
Downloaded from: www.icosmo.ir

Downloaded from: www.icosmo.ir

تسطیح سَمتی لامبرت (Lambert azimuthal equal-area projection)



در این تسطیح ابتدا یک صفحه به نقطه‌ای از کره (این نقطه را نقطه‌ی مرکز نقشه می‌نامیم) مماس می‌کنیم سپس برای بدست آوردن تصویر هر نقطه دایره‌ای به مرکزیت نقطه‌ی مرکز نقشه و گذرنده از نقطه‌ی مذکور رسم می‌کنیم تا در نقطه‌ای دیگر صفحه را قطع کند.



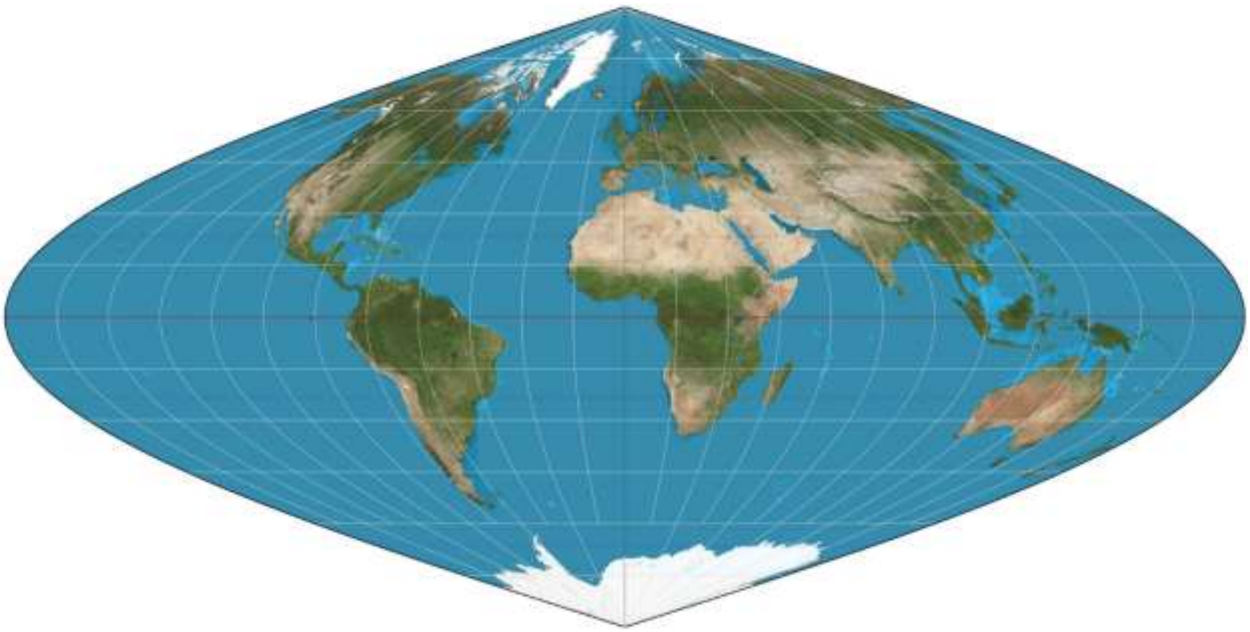
در تصویرهای بالا، نقشه‌ی سمت راست به مرکز قطب شمال و نقشه‌ی سمت چپ به مرکز $\ell = 4°E,\ \varphi = 0$ می‌باشد.

درصورتی‌که نقطه‌ی مرکز نقشه، قطب شمال باشد؛ ضابطه‌ی این تسطیح به‌شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} r = \sin\dfrac{\theta}{2} \\ \psi = \phi \end{cases}$$

Downloaded from: www.icosmo.ir

تسطیح هم‌مساحت مرکاتور (Sinusoidal Projection)

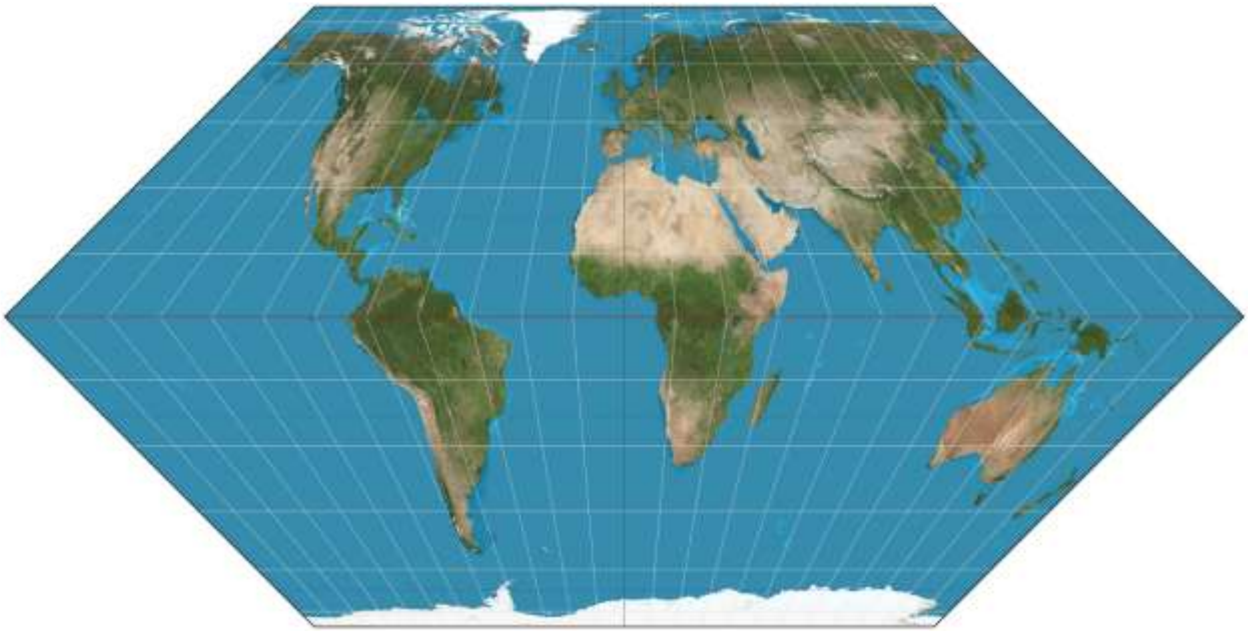


در این تسطیح برای به‌دست آوردن نقشه، کافی‌ست تا هر مدار را از نقطه‌ی مشترکش با نصف‌النهار $180°$ بشکافیم و آن را در صفحه قرار دهیم (به طور همگن نسبت به ϕ، y را تغییر می‌دهیم) در این تسطیح مدارها به‌صورت خطوط افقی بوده و نصف‌النهارها به‌شکل منحنی $\cos$ می‌باشند. ضابطه‌ی این تسطیح به‌شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} x = \ell \cos\varphi \\ y = \varphi \end{cases}$$

توجه کنید برای اینکه رابطه‌ی بالا نقشه‌ی مطلوب ما را بسازد، باید ℓ را در بازه‌ی $(-\pi, +\pi)$ در نظر بگیریم.

تسطیح هم‌مساحت اِکِرت II (Eckert II Projection)



شکل کلی ضابطه‌ی این تسطیح به‌شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} x = \ell\sqrt{a - b\sin|\varphi|} \\ y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{a - b\sin|\varphi|}\right) \times \operatorname{sgn}\varphi \end{cases}$$

که در آن a و b دو مقدار ثابت هستند و تابع sgn به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی تسطیح، مشخص است که a و b هر مقداری را نمی‌توانند اتخاذ کنند و مقدار ثوابت بر روی دامنه‌ی تسطیح قیدهایی اعمال میکنند. به‌عنوان نمونه برای اینکه دامنه‌ی تسطیح، کلِ کره را پوشش دهد باید شرط زیر برقرار باشد.

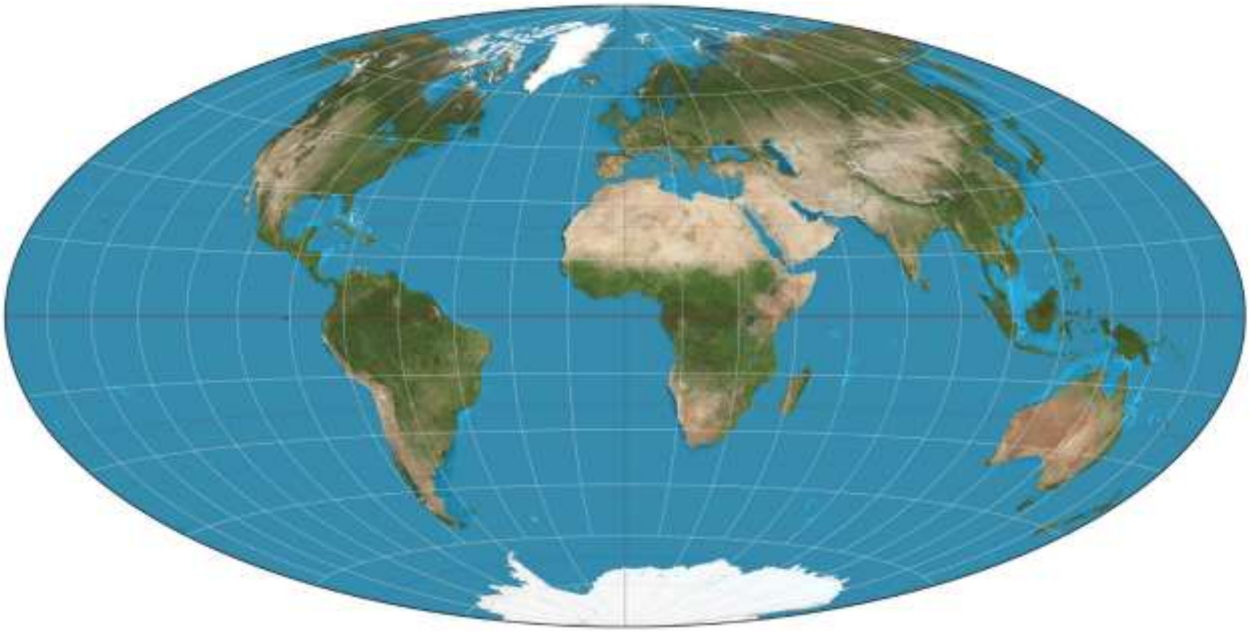
$$|b| < a$$

در این تسطیح مدارها به‌صورت خطوط افقی و نصف‌النهارها به‌صورت خطوط مایل می‌باشند.

Downloaded from: www.icosmo.ir

Downloaded from: www.icosmo.ir

تسطیح هامر (Hammer projection)

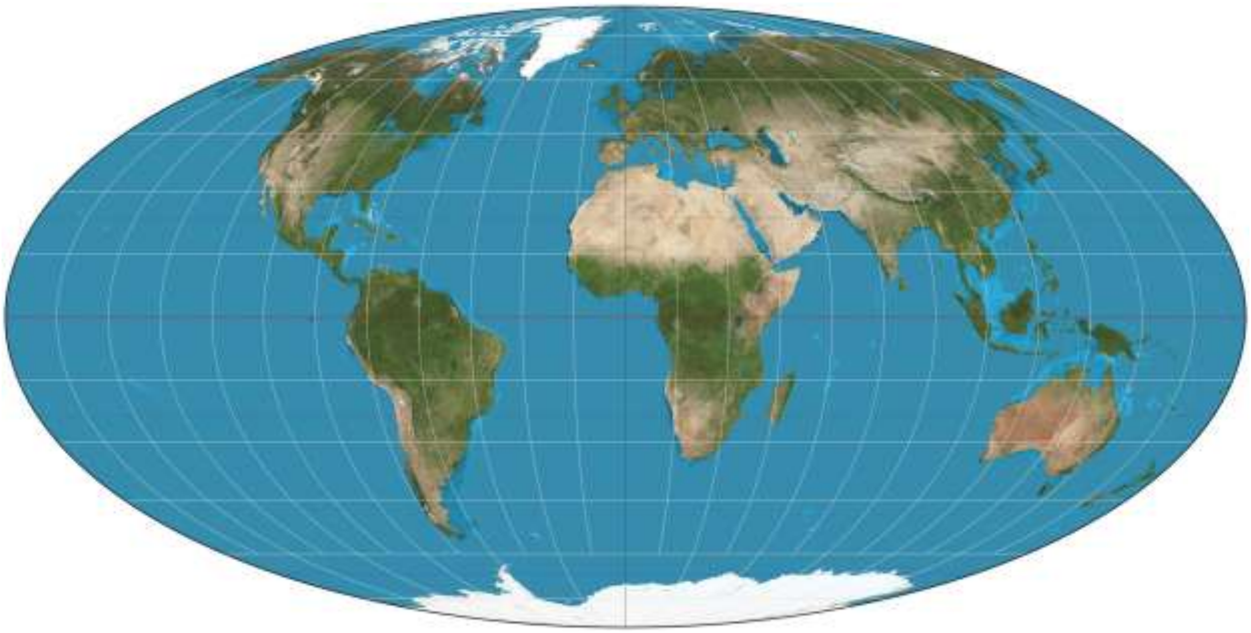


ضابطه‌ی این تسطیح به‌شکل زیر می‌باشد

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos\varphi \sin \ell/2}{\sqrt{1+\cos\varphi\cos \ell/2}} \\ y = \dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi\cos \ell/2}} \end{cases}$$

Downloaded from: www.icosmo.ir

تسطیح مالوید (Mollweide Projection)



ضابطه‌ی این تسطیح به‌شکل زیر است.

$$\begin{cases} x = \ell \cos\gamma \\ y = \sin\gamma \end{cases}$$

که در آن γ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

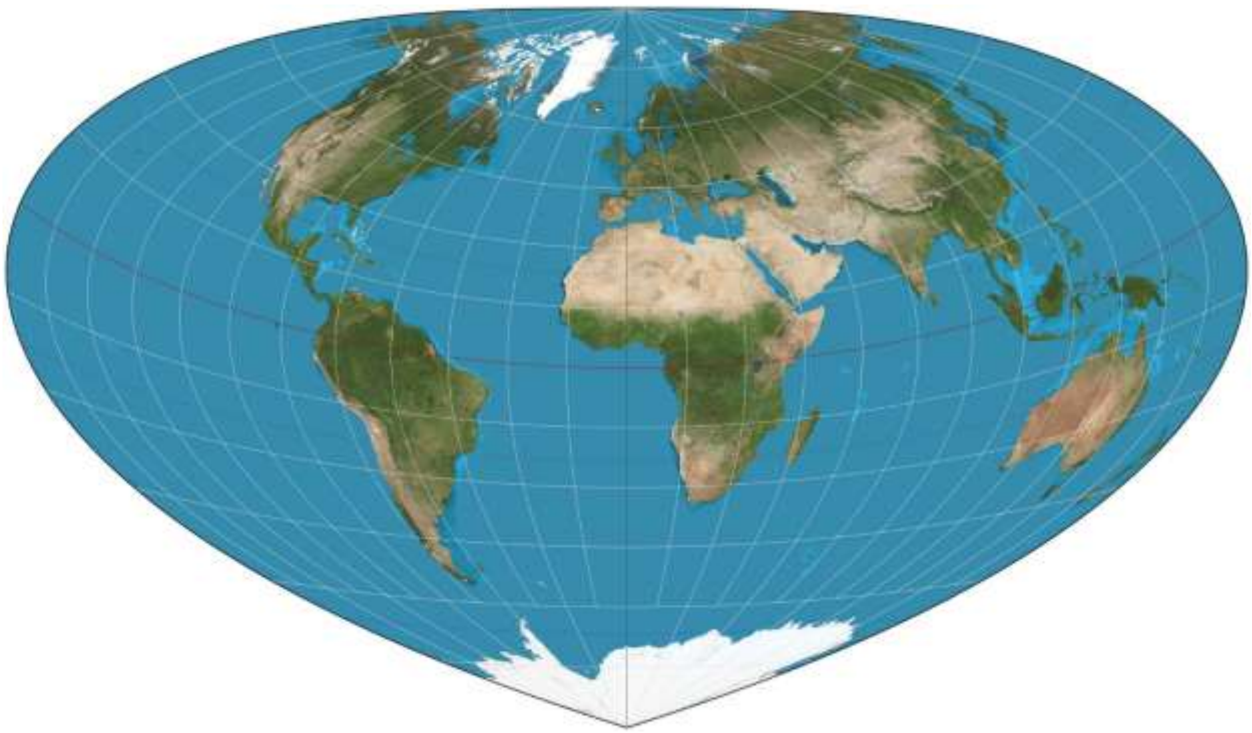
$$2\gamma + \sin 2\gamma = k \sin\varphi$$

و در آن k یک عدد ثابت می‌باشد.

نقشه‌ای که از این تسطیح به‌دست می‌آید به شکل بیضی می‌باشد. در این تسطیح مدارها به شکل خطوط افقی و نصف‌النهارها به شکل بیضی در می‌آیند.

Downloaded from: www.icosmo.ir

تسطیح باتملی (Bottomley Projection)



ضابطه‌ی این تسطیح در حالت کلی به شکل زیر می‌باشد

$$\begin{cases} x = \theta \sin\gamma \\ y = \dfrac{\pi}{2} - \theta\cos\gamma \end{cases}$$

که در آن γ برابر است با

$$\gamma = k\frac{\phi}{\theta}\sin\theta$$

و در آن k عددی ثابت است.

---

* توجه کنید در تسطیحاتی که در بالا معرفی شدند، ثوابتِ مقیاس برابر واحد در نظر گرفته شده است.

تمارین

- به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید تسطیحاتی که در بالا معرفی شد، هم‌مساحت می-باشند.

- در نگاشت *Mollweide* نشان دهید γ تابعی یک به یک از φ است. میتوانید اهمیتِ بررسیِ این موضوع را شرح دهید؟

- در تسطیح اکرت II در صورتی که بخواهیم نقشه‌ی ما محدود به دامنه‌ی عرض جغرافیایی $(-\varphi_0, +\varphi_0)$ باشد قیدی بر روی ثوابت بیابید.

- در نظر بگیرید ضابطه‌ی یک تسطیح به شکل

$$\begin{cases} x = \ell\, f(\varphi) \\ y = f(\varphi) \end{cases}$$

باشد که در آن $f(\varphi)$ تابعی از φ می‌باشد. با فرض هم‌مساحت بودن این تسطیح، تسطیحِ اکرت II را بدست آورید.

- ضابطه‌ی تسطیحی را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x = \ell \cos\big(f(\varphi)\big) \\ y = \sin(f(\varphi)) \end{cases}$$

با فرض هم‌مساحت بودن این تسطیح، تسطیحِ مالوید را به‌دست آورید.

- تسطیحی با ضابطه‌ی

Downloaded from: www.icosmo.ir

$$\begin{cases} r = \theta \\ \psi = f(\theta, \phi) \end{cases}$$

در نظر بگیرید. با فرض هم‌مساحت بودن این تسطیح، تسطیح باتملی را به‌دست آورید.

- نشان دهید به ازای هر تابع مشتق‌پذیر $f(\ell)$ یک تسطیح هم‌مساحت با ضابطه‌ی زیر وجود دارد

$$\begin{cases} x = f(\ell) \\ y = \dfrac{\sin\varphi}{f'(\ell)} \end{cases}$$

که البته نقاطی که در آنها $f'(\ell)$ برابر صفر است(در صورت وجود)، جزو دامنه‌ی این تسطیح نخواهد بود.

- ضابطه‌ی تسطیح هم‌مساحتی را به شکل

$$\begin{cases} x = \ell\, f(\varphi) \\ y = \varphi\, f(\varphi) \end{cases}$$

در نظر بگیرید و تمام جواب‌های ممکن برای f را به‌دست آورید.

- تسطیحی با ضابطه‌ی

$$\begin{cases} r = f(\theta, \phi) \\ \psi = \theta \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. تابع f را طوری بیابید که این تسطیح هم‌مساحت باشد.

Downloaded from: www.icosmo.ir

Downloaded from: www.icosmo.ir

- در صورتی که تسطیح $\{x = f(\theta,\phi), y = g(\theta,\phi)\}$ یک تسطیح هم‌مساحت باشد، نشان دهید تسطیح $\{x = h(f), y = h(g)\}$ نیز هم‌مساحت است اگر و تنها اگر مقدار $h'(f) \times h'(g)$ یک ثابت مثبت باشد.

- نشان دهید در صورتی که چهار تسطیحِ

$$T_1: \{x = X_1, y = Y_1\}\ ,$$
$$T_2: \{x = X_1, y = Y_2\}\ ,$$
$$T_3: \{x = X_2, y = Y_1\}\ ,$$
$$T_4: \{x = X_2, y = Y_2\}$$

تسطیحات هم‌مساحت باشند و بدانیم X یک ترکیب خطی از X_1 و X_2 و هم‌چنین Y یک ترکیب خطی از Y_1 و Y_2 است، آنگاه تسطیح $T: \{x = X, y = Y\}$ نیز هم‌مساحت است.

- فرض کنیم نگاشت تسطیحی به‌صورت $T: \{\ \}$ داریم. تابع S را روی دامنه‌ی توابع تسطیح تعریف می‌کنیم. خروجی این تابع نسبت مساحت نقشه به مساحت کره در هر نقطه است. (یعنی نسبت المان‌های نظیر)
برای ضوابط تسطیح زیر تابع S را بیابید. (α و β ثوابت هستند)

$$T: \begin{cases} y = \alpha\, \varphi \\ x = \beta\, \ell \end{cases}$$

$$U: \begin{cases} y = \alpha \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] \\ x = \alpha\, \ell \end{cases}$$

$$V:\begin{cases} r = \alpha \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) \\ \psi = \ell \end{cases}$$

$$W:\begin{cases} r = \alpha \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) \\ \psi = \ell \end{cases}$$

$$X:\begin{cases} y = \alpha \sin \varphi \\ x = \alpha \cos \ell \end{cases}$$

اکنون توابع S که برای هر نگاشت یافته‌اید –که باید توابعی تک‌متغیری شده باشند– را در نظر بگیرید. مقداری مانند Q_0 در دامنه S و یک همسایگی به شعاع δ حول Q_0 در نظر بگیرید.

اکنون Q_0 را برای هرکدام از نگاشت‌های بالا طوری بیابید که تا مرتبه اول δ نگاشت برای نقاط درون این همسایگی هم‌مساحت عمل کند.

Downloaded from: www.icosmo.ir