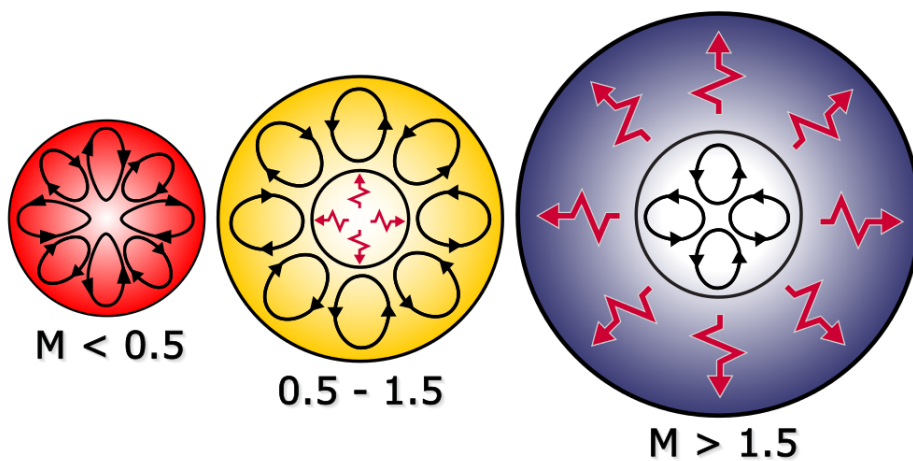


آشنایی با اخترفیزیک ستاره‌ای



نگارش
دکتر حسین مصحفی

www.icosmo.ir

به روز شده : پاییز ۱۳۹۵

«هوالحبیب»

لطفاً قبل از مطالعه، به این چند خط توجه بفرمایید !

خواننده محترم؛

مطلبی که پیش روی دارید، بخشی از یک مجموعه بزرگ‌تر است که در آینده به صورت کتاب عرضه خواهد شد. هدف این مطالب آشنایی مخاطبان فارسی زبان با برخی مفاهیم نجوم شامل اخترفیزیک ستاره‌ای، دینامیک کهکشانی و کیهان‌شناسی است. مخاطبان این درس‌نامه بطور عمده دانش‌آموزان علاقمند دوره متوسطه به ویژه آن دسته که برای المپیاد نجوم و اخترفیزیک آماده می‌شوند و همچنین دانشجویان مقطع کارشناسی فیزیک می‌باشند. این مجموعه بطور عمده گردآوری نظریه‌ها و مطالبی است که در کتب مرجع بیان شده‌اند و نویسنده سعی در انتخاب مباحث کاربردی و مهم و بیان آن‌ها با زبان ساده‌تر داشته است. نویسنده تأکید می‌کند این مجموعه در حال ویرایش و تکمیل است و به هیچ عنوان ادعایی مبنی بر بی نقص بودن و یا استخراج مباحث بطور مستقل ندارد. از شما خواننده محترم، خواهشمندم هرگونه نواقص و اشکالات علمی، نوشتاری و ساختاری را از طریق صفحه اینترنتی نویسنده و یا رایانامه اطلاع دهد. نویسنده در ویرایش‌های بعدی از شما مخاطب دقیق و نکته سنج تشکر و ذکر نام خواهد کرد.

کپی برداری و استفاده از این مجموعه فقط در صورت ارجاع به نویسنده مجاز است.

دکتر حسین مصحفی

www.icosmo.ir

moshafi86[AT]gmail.com

فهرست مطالب

فهرست مطالب

۱	ساختمان ستاره‌ای و تحول ستاره	۱
۱.۱	تعادل ترمودینامیک موضعی	۱
۲.۱	معادله‌ی انرژی	۱
۳.۱	معادله‌ی حرکت	۱
۴.۱	زمان رمبش آزاد ستاره	۲
۵.۱	قضیه ویریا	۴
۶.۱	انرژی کل یک ستاره	۴
۷.۱	معادلات حاکم بر تغییرات ترکیبات	۶
۸.۱	مقیاس زمان‌های مشخصه‌ی تحول ستاره‌ای	۸
۱.۸.۱	مقیاس زمان دینامیکی	۱۰
۲.۸.۱	مقیاس زمانی گرمایی	۱۱
۳.۸.۱	مقیاس زمانی هسته‌ای	۱۱
۹.۱	تعادل هیدروستاتیک در نسبیت عام	۱۲
۱۰.۱	فیزیک مقدماتی گاز و تابش در داخل ستاره	۱۲
۱.۱۰.۱	معادله‌ی حالت	۱۴
۲.۱۰.۱	فشار یون	۱۴
۳.۱۰.۱	فشار الکترونی	۱۶
۱۱.۱	معادله بولتزمن و معادله ساها	۱۷
۱.۱۱.۱	یونیزاسیون هیدروژن	۱۹
۲.۱۱.۱	تابع توزیع ماکسول-بولتزمن	۲۲
۱۲.۱	تابش و مفاهیم مرتبط	۲۳
۱.۱۲.۱	نظریه‌ی موج الکترومغناطیس ماکسول	۲۵
۲.۱۲.۱	طیف الکترومغناطیس	۲۵
۳.۱۲.۱	تابش جسم سیاه و تابع توزیع پلانک	۲۶
۴.۱۲.۱	شدت ویژه و تکانه	۲۶
۱۳.۱	انتقال تابشی	۳۰
۱.۱۳.۱	فرایند نشر	۳۰
۲.۱۳.۱	جذب تابش	۳۱
۱۴.۱	معادله‌ی انتقال تابشی	۳۲
۱۵.۱	عمق نوری و تابع چشمه	۳۳
۱۶.۱	پویش آزاد متوسط	۳۴
۱۷.۱	نیروی تابشی	۳۵
۱۸.۱	پخش تابشی	۳۵
۱.۱۸.۱	میانگین روزلند برای	۳۷

۳۸	پخش گرمایی توسط حرکات تصادفی	۲.۱۸.۱
۳۹	انتقال انرژی توسط رسانش	۳.۱۸.۱
۴۰	درخشندگی ادینگتون	۱۹.۱
۴۰	فرآیندهای همرفتی	۲۰.۱
۴۱	برخی روابط ترمودینامیکی	۱.۲۰.۱
۴۴	ظرفیت گرمایی ویژه	۲.۲۰.۱
۴۴	مشتق‌های بی دررو	۳.۲۰.۱
۴۶	همرفت	۲۱.۱
۴۶	شرایط لازم برای پایداری در برابر همرفت	۱.۲۱.۱
۴۹	انتقال انرژی توسط همرفت و نظریه طول ادغام	۲.۲۱.۱
۵۰	مدل‌های پلی تروپ	۲۲.۱
۵۵	برخی روابط در تعادل هیدروستاتیک	۲۳.۱

فصل ۱

ساختار ستاره‌ای و تحول ستاره

۱.۱ تعادل ترمودینامیک موضعی

وقتی که فاصله‌ی متوسط طی شده توسط ذرات بین برخوردهای متوالی-طول پویش آزاد- بسیار کوچک‌تر از ابعاد سیستم باشد، تعادل ترمودینامیک به صورت موضعی بدست آمده است، و سیستم ممکن است در نقاط مختلف دماهای متفاوت داشته باشد. بنابراین با یک توزیع دمایی توصیف می‌شود. به علاوه، اگر، زمان سپری شده بین برخوردها- زمان پویش آزاد- بسیار کوتاه‌تر از مقیاس زمانی برای تغییر ویژگی‌های ماکروسکوپیک باشد، تعادل سیستم حفظ شده، اما توزیع دمایی ممکن است با زمان تغییر یابد. این وضعیتی است که در ستارگان داریم.

تعادل بین ماده و تابش با برخوردهای بین ذرات و فوتونها (برهم‌کنش) بدست می‌آید. در این حالت تابش یک تابش جسم سیاه می‌شود که توزیع انرژی فوتون‌های آن با تابع پلانک داده می‌شود، و دماهای گاز و تابش یکسان است. همان‌طور که بعدها خواهیم دید طول پویش آزاد متوسط در ساختار درون ستاره‌ای چند مرتبه بزرگی کوچک‌تر از ابعاد معمول ستاره است. در نتیجه این فرض‌ها گاز و تابش می‌توانند در حال تعادل موضعی باشند، یعنی دمای گاز و تابش در هر نقطه یکسان است. (دقت کنید دمای کل ستاره یکسان و یا ثابت نیست). این بدان معناست که تابش در ساختار درونی ستاره تقریباً جسم سیاه است، که با تابع پلانک متناظر با یک دمای محلی منحصر بفرد توصیف می‌شود.

۲.۱ معادله‌ی انرژی

قانون اول ترمودینامیک، و یا اصلی پایستگی انرژی بیان می‌کند که انرژی درونی یک سیستم ممکن است به دو شکل انتقال انرژی تغییر کند: کار و گرما. گرما ممکن است داده شود یا گرفته شود، و کار ممکن است روی سیستم انجام شود و یا سیستم روی محیط کار انجام دهد که مستلزم تغییر حجم سیستم است. یک عنصر جرم کوچک dm درون ستاره فرض کنیم که در آن دما، چگالی و ترکیبات شیمیایی می‌تواند تقریباً ثابت در نظر گرفته شود. با فرض تقارن کروی، چنین عنصر جرمی می‌تواند درون پوسته‌ی کروی بین شعاع r و $r + dr$ در نظر گرفته شود بنابراین عنصر حجم هست $dV = 4\pi r^2 dr$ و

$$dm = dV \rho = 4\pi r^2 dr \rho \quad (1.1)$$

انرژی درونی در واحد جرم را u و فشار را P نمایش می‌دهیم. در این متن تغییرات کوچک کمیت f در زمان کوچک t را با f نشان می‌دهیم. پس اگر Q مقدار گرمای جذب شده ($Q > 0$) یا تابش شده ($Q < 0$) توسط جرم و W کار انجام شده روی آن در زمان t باشد، تغییر انرژی درونی طبق قانون اول ترمودینامیک

می‌شود

$$(u dm) = dm u = Q + W \quad (2.1)$$

فرض کردیم پایداری جرم وجود دارد و dm تغییر نمی‌کند. بنابراین کار را می‌توان به این صورت بیان کرد

$$W = P dV = P \frac{dV}{dm} dm = P \frac{1}{\rho} dm: \quad (3.1)$$

دقت نمایید که انقباض به معنای کوچک شدن اندازه‌ی عنصر یا $dV < 0$ است و سیستم انرژی اضافه می‌کند، در حالی‌که انبساط ($dV > 0$) وقتی بدست می‌آید که سیستم انرژی خود را مصرف کند. منابع گرمای عنصر جرم عبارتند از: الف) اگر وجود داشته باشد آزادسازی انرژی هسته‌ای و ب) تعادل شار گرمایی به درون عنصر جرم و خارج از آن. نرخ آزادسازی انرژی هسته‌ای در واحد جرم را با q نمایش می‌دهیم و شارش گرما عمود بر سطح کروی را با $F(m)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین F بعد توان دارد، و واضحاً $F(M) \sim L$ بدین ترتیب داریم

$$Q = q dm t + F(m) t - F(m + dm) t$$

اما می‌دانیم $F(m + dm) = F(m) + \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right) dm$ و بنابراین

$$Q = q \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right) dm t \quad (4.1)$$

با جای‌گذاری معادلات در معادله‌ی ۲.۱ می‌توانیم بنویسیم

$$dm u + P \frac{1}{\rho} dm = q \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right) dm t \quad (5.1)$$

که در حد $t \rightarrow 0$ بدست می‌آوریم

$$u + P \frac{1}{\rho} = q \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right) \quad (6.1)$$

در حالت تعادل گرمایی، وقتی مشتق‌ها صفر می‌شوند، داریم

$$q = \frac{dF}{dm} \quad (7.1)$$

با انتگرال‌گیری روی جرم داریم

$$\int_0^M q dm = \int_0^M \frac{dF}{dm} dm = F(M) - F(0) = L \quad (8.1)$$

جریان گرمایی باید در مرکز صفر شود تا دچار تکینگی نشویم. سمت چپ معادله توان کل ناشی از فرایندهای هسته‌ای ستاره است، که معمولاً با L_{nuc} درخشندگی هسته‌ای نمایش داده می‌شود

$$L_{nuc} = \int_0^M q dm \quad (9.1)$$

و بنابراین تعادل گرمایی دلالت بر این دارد که انرژی از دست رفته ستاره توسط تابش با همان نرخ در درون ستاره تولید می‌شود، $L = L_{\text{nuc}}$.

۳.۱ معادله‌ی حرکت

قانون دوم نیوتن، یا همان معادله‌ی حرکت، بیان می‌کند که نیروی خالص وارد بر یک جسم با جرم ثابت شتابی به آن وارد می‌کند که برابر با نیرو تقسیم بر جرم است. این قانون پایستگی تکانه برای یک جسم با جرم مشخص است. یک عنصر حجم کوچک استوانه‌ای درون ستاره در نظر بگیرید، با محوری به طول dr در راستای شعاعی بین شعاع r و $r + dr$ و سطح مقطع dS مطابق شکل. اگر چگالی درون عنصر و جرم m با رابطه‌ی زیر داده شود

$$m = \rho dr dS: \quad (10.1)$$

نیروهای وارد بر عنصر جرم دو دسته‌اند: (الف) نیروی گرانشی، که از جرم درون پوخته به شعاع r و (ب) نیرویی که ناشی از فشار اعمال شده از گاز اطراف جزء جرم است. نیروی گرانشی شعاعی و به سمت مرکز ستاره است. به واسطه‌ی تقارن کروی فرض شده، نیروهای فشار عمود بر سطح کناره‌های استوانه در تعادلند و فقط نیروی فشار عمود بر سطوح بالا و پایین مورد توجه است. معادله‌ی حرکت جزء جرم را می‌توان این‌طور نوشت

$$\rho m = \frac{Gm}{r^2} + P(r)dS - P(r+dr)dS \quad (11.1)$$

اما $P(r+dr) = P(r) + \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)dr$ و در نتیجه

$$\rho m = \frac{Gm}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} m$$

حال m را حذف می‌کنیم

$$\rho = \frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (12.1)$$

اگر m را به جای r به عنوان متغیر مستقل فضا در نظر می‌گیریم، با استفاده از تبدیل $dr = dm/(4\pi r^2)$ معادله‌ی حرکت می‌شود

$$\rho = \frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{4\pi r^4} \frac{\partial P}{\partial m} \quad (13.1)$$

وقتی از شتاب صرف‌نظر کنیم، معادلات بالا یک تعادل هیدروستاتیک بین گرانش و فشار گاز را توصیف خواهند کرد:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \quad (14.1)$$

و یا

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{G}{4\pi r^4} \quad (15.1)$$

همان‌طور که از دو معادله قبل پیداست، سمت راست همواره منفی است، تعادل هیدروستاتیکی حاکی از آن است که فشار به سمت خارج کاهش می‌یابد. گرادیان فشار در مرکز منفی است. می‌توانیم فشار مرکز ستاره را در تعادل هیدروستاتیک با انتگرال‌گیری از معادله‌ی ۱۵.۱ از مرکز تا سطح ستاره تخمین بزنیم

$$P(M) - P(0) = \int_0^M \frac{G_{dm}}{4r^4} \quad (۱۶.۱)$$

در سمت چپ فقط فشار در مرکز $P(0)$ را داریم چون فشار در سطح عملاً صفر می‌شود $P(M) = 0$. در سمت راست می‌توان r را با شعاع ستاره R جای‌گزین کرد تا یک حد پایین برای فشار مرکز ستاره بدست آورد:

$$P_c = \int_0^M \frac{G_{dm}}{4r^4} > \int_0^M \frac{G_{dm}}{4R^4} \quad (۱۷.۱)$$

که نتیجه می‌دهد

$$P_c > \frac{GM^2}{8R^4} = 4:4 \cdot 10^{13} \frac{M}{M} \frac{R}{R} \text{ Nm}^{-2} \quad (۱۸.۱)$$

فشار در مرکز خورشید بیش از ۴۵۰ میلیون اتمسفر است.

۴.۱ زمان رمبش آزاد ستاره

۵.۱ قضیه ویريال

پیامد مهم تعادل هیدروستاتیک پیوندی است که بین انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی درونی (یا به صورت انرژی جنبشی در دستگاه ذرات آزاد) برقرار می‌کند. اگر معادله‌ی تعادل هیدروستاتیک را در حجم $V = \frac{4}{3} r^3$ ضرب کنیم و روی کل ستاره انتگرال بگیریم

$$\int_0^M P(R) V dP = \frac{1}{3} \int_0^M \frac{G_{dm}}{r} \quad (۱۹.۱)$$

انتگرال سمت راست معادله‌ی ۱۹.۱ انرژی پتانسیل گرانشی ستاره نیست، بلکه انرژی لازم برای آوردن جرم از بی‌نهایت است

$$= \int_0^M \frac{G_{dm}}{r} \quad (۲۰.۱)$$

سمت چپ معادله‌ی ۱۹.۱ را می‌توان به صورت جزء به جزء انتگرال‌گیری نمود

$$\int_0^M P(R) V dP = [PV]_0^R \int_0^M V(R) P dV \quad (۲۱.۱)$$

جمله اول سمت راست صفر می‌شود. با ترکیب معادلات ۱۹.۱ تا ۲۱.۱ در نهایت بدست می‌آوریم

$$\int_0^Z V(R) P dV = \quad (22.1)$$

و یا چون $dV = dm$ است

$$\int_0^Z M P - dm = \quad (23.1)$$

این شکل کلی قضیه ویریال است. رابطه‌ی مشابهی، برای بخشی از ستاره به کار می‌رود را می‌توان با انتگرال گرفتن از معادله‌ی ۱۹.۱ تا شعاع $R_s < R$ بدست آورد:

$$P_s V_s \int_0^{Z_s} M_s P - dm = \frac{1}{3} \quad (24.1)$$

که s انرژی پتانسیل گرانشی کره در شعاع R_s است که از پوسته‌ی خارج از این شعاع تأثیر نمی‌پذیرد در حالی که P_s فشار در R_s ناشی از پوسته جرم محیطی است. یک مورد خاص از یک گاز کامل به چگالی و دمای T در نظر گیرید. جرم ذرات گاز m_g باشد. فشار گاز با رابطه‌ی $P = (m_g) k_B T$ داده می‌شود که k_B ثابت بولتزمن است. انرژی جنبشی هر ذره $\frac{3}{2} k_B T$ است، و چون برای یک گاز کامل انرژی درونی برابر با انرژی جنبشی ذرات گاز است، انرژی درونی در واحد جرم هست

$$u = \frac{3 k_B T}{2 m_g} = \frac{3 P}{2} \quad (25.1)$$

این معادله را با معادله قضیه ویریال ترکیب نماییم، داریم $\frac{1}{2} \int_0^{R_M} u dm =$ انتگرال روی سمت چپ به سادگی انرژی درونی کل U را می‌دهد، و بنابراین

$$U = \frac{1}{2} \quad (26.1)$$

می‌توانیم از این نتیجه استفاده کنیم تا دمای متوسط درونی یک ستاره را تخمین بزنیم (فرض کنیم ماده درون یک ستاره را می‌توان با گاز کامل تقریب زد). انرژی پتانسیل گرانشی ستاره‌ای به جرم M و شعاع R با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$= \frac{GM^2}{R} \quad (27.1)$$

که یک ثابت از مرتبه‌ی واحد است که از روی توزیع ماده درون ستاره تعیین می‌شود. از قضیه‌ی ویریال از طرفی داریم $U = \frac{1}{2} GM^2 = R$ و از طرف دیگر

$$U = \int_0^M \frac{3 k_B T}{2 m_g} dm = \frac{3 k_B}{2 m_g} T M \quad (28.1)$$

که T دمای متوسط روی کل ستاره است. با ترکیب دو نتیجه بدست می‌آید

$$T = \frac{m_g G M}{3 k_B R} \quad (29.1)$$

با جای‌گذاری چگالی متوسط $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$ در این معادله بدست می‌آوریم $T \propto M^{2/3} R^{-1/3}$ بدین معنا که بین دو ستاره با جرم‌های یکسان، آن‌که چگال‌تر است داغ‌تر نیز هست. با $\frac{1}{2} =$ و فرض گاز اتمی هیدروژن، بدست می‌آوریم دمای متوسط یک ستاره هست

$$T \approx 4 \times 10^6 \frac{M}{M_\odot} \frac{R}{R_\odot} \text{ K} \quad (30.1)$$

دقت داریم که T بسیار بزرگ‌تر از دمای سطح است T_{eff} که حاکی از این است که دمای درون بسیار بیشتر از این مقادیر است. در دماهای چند میلیون کلین، هیدروژن و هلیوم کاملاً یونیزه هستند و حتی عناصر سنگین‌تر به شکل گازی و یونیزه یافت می‌شوند. ماده درون ستاره‌ای بنابراین یک پلاسما است که مخلوطی از یون و الکترون‌های آزاد است.

۶.۱ انرژی کل یک ستاره

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی $\frac{dU}{dm} + P = q$ روی کل ستاره داریم

$$\int_0^M \frac{dU}{dm} dm + \int_0^M P dm = \int_0^M q dm = L_{\text{nuc}} \quad (31.1)$$

چون متغیرهای t و m مستقل هستند، ترتیب انتگرال و مشتق می‌تواند عوض شود. اولین جمله سمت معادله هست

$$\int_0^M \frac{dU}{dm} dm = \frac{d}{dt} \int_0^M U dm = U \quad (32.1)$$

اکنون

$$\frac{1}{m} = \frac{\partial V}{\partial m} = \frac{\partial U}{\partial m} \quad (33.1)$$

و

$$U = 4 \pi r^2 \rho \quad (34.1)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء از جمله دوم سمت معادله‌ی ۳۱.۱ بدست می‌آوریم

$$\int_0^M P \frac{\partial U}{\partial m} dm = [P U]_0^M - \int_0^M 4 \pi r^2 \rho \frac{\partial P}{\partial m} dm \quad (35.1)$$

و چون در مرکز ستاره V صفر می‌شود و فشار P در سطح، بدست می‌آوریم

$$U = \int_0^{Z_M} 4\pi r^2 \rho \frac{P}{\rho} dm = L_{nuc} \quad L \quad (36.1)$$

به معادله‌ی حرکت باز می‌گردیم و با ضرب کردن r روی کل ستاره انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^{Z_M} r \rho dm = \int_0^{Z_M} \frac{Gm}{r^2} r dm = \int_0^{Z_M} 4\pi r^2 \rho \frac{P}{\rho} dm \quad (37.1)$$

انرژی جنبشی کل ستاره به این صورت است

$$K = \int_0^{Z_M} \frac{1}{2} r^2 dm \quad (38.1)$$

انتگرال سمت چپ بنابراین می‌شود

$$\int_0^{Z_M} r \rho dm = \int_0^{Z_M} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) dm = \frac{d}{dt} \int_0^{Z_M} \frac{1}{2} r^2 dm = K \quad (39.1)$$

و اولین جمله‌ی سمت راست معادله هست

$$\int_0^{Z_M} Gm \frac{r}{r^2} dm = \int_0^{Z_M} Gm \frac{1}{r} dm = \frac{d}{dt} \int_0^{Z_M} \frac{Gm dm}{r} = - \quad (40.1)$$

بنابراین می‌رسیم به

$$K + U = \int_0^{Z_M} 4\pi r^2 \rho \frac{P}{\rho} dm \quad (41.1)$$

از ترکیب معادلات داریم

$$U + K + U = L_{nuc} \quad L \quad (42.1)$$

که سمت چپ این معادله نرخ تغییر انرژی کل ستاره $E = U + K + U$ است

$$E = L_{nuc} \quad L \quad (43.1)$$

اگر یک ستاره در تعادل گرمایی باشد، در نتیجه انرژی ثابت است $E = 0$. اگر ستاره در تعادل هیدروستاتیک باشد، K نیز صفر می‌شود. در این حالت U و با قضیه‌ی ویریال توصیف مرتبط می‌شوند و هر دو انرژی کل ستاره را تعیین می‌کنند. در نتیجه، هر یک از آن‌ها پایسته می‌ماند نه فقط جمع‌شان. برای مثال، یک ستاره در تعادل گرمایی و هیدروستاتیک نمی‌تواند به طور سرتاسری سرد و منبسط شود؛ باید انرژی (گرمایی) درونی و انرژی پتانسیل گرانشی را جداگانه پایسته نگه دارد. نتیجه دیگر این که یک ستاره در حالت تعادل هیدروستاتیک یک ظرفیت گرمایی منفی دارد، بدین معنا که هرچه داغ‌تر شود انرژی از دست می‌دهد! این هم از قضیه ویریال نتیجه می‌شود: برای یک گاز کامل داریم

$$E = U + K = \frac{1}{2} U \quad (44.1)$$

و در حالت کلی سمت راست ضرب در یک ثابت از مرتبه واحد می‌شود. از آن‌جا که اگر $E < 0$ پس U و دمای متوسط ستاره باید افزایش یابد. در همان زمان، ستاره باید منقبض شود. در واقع، انرژی پتانسیل گرانشی آزاد شده در انقباض هم انرژی از دست رفته (به صورت تابش) و انرژی گرمایی که موجب می‌شود دما به مقدار مساوی در گاز کامل افزایش یابد را تأمین می‌کند.

۷.۱ معادلات حاکم بر تغییرات ترکیبات

همان‌طور که مشاهده نمودیم ماده ستاره‌ای از الکترون‌های آزاد و هسته‌های نامقید تشکیل شده است که نمی‌تواند تنها تغییرات ترکیبات شیمیایی باشد. تنها تغییرات ممکن در فراوانی عناصر سازنده می‌تواند با تبدیل از یک عنصر به عنصر دیگر توسط فرایندهای هسته‌ای که برهم‌کنش بین هسته‌هاست رخ دهد. هسته‌ای اتمی از پروتون‌ها و نوترون‌ها (که نوکلئون‌ها نامیده می‌شوند) تشکیل شده است که به دسته‌ی سنگین ذرات بنیادی یعنی باریون‌ها^۱ تعلق دارند. پروتون بار الکتریکی مثبت و نوترون بار خنثی دارد. این ذرات را می‌توان با دو عدد یعنی تعداد باریونی A و بار الکتریکی Z مشخص کرد که برای پروتون $(1; +1)$ و نوترون $(1; 0)$ است. الکترون‌ها بار مخالف پروتون دارند. عدد باریونی‌شان صفر است یعنی سنگین نیستند. ذراتی به نام نوترینو داریم که عدد باریونی صفر و بار الکتریکی صفر دارند. الکترون‌ها و نوترینوها به دسته‌ای از ذرات به نام لپتون‌ها^۲ تعلق دارند. برای هر ذره، مکانیک کوانتومی نسبیتی وجود یک پاد ذره را که علامت عدد باریونی یا لپتونی و بار معکوس است را پیش‌بینی می‌کند. معروف‌ترین پاد ذره پوزیترون که پاد ذره‌ی الکترون است. پروتون‌ها و نوترون‌ها توسط نیروی هسته‌ای قوی به هم پیوند یافته‌اند. این یک نیروی کوتاه برد، مستقل از بار ذره است که نیروی کولونی بین پروتون‌ها در ابعاد هسته‌ای را خنثی می‌کند. نیروی دیگری که می‌تواند روی پروتون‌ها و نوترون‌ها عمل کند، نیروی ضعیف است که تخمین زده می‌شود در ابعاد کم‌تری ($10^{-17} m$) عمل می‌کند. برهم‌کنش ضعیف مسئول تبدیل پروتون‌ها به نوترون‌ها و بالعکس است. در یک واکنش هسته‌ای بار الکتریکی نیز مانند عدد باریونی و لپتونی پایسته می‌ماند. بنابراین در واکنش ضعیف، یک الکترون یا پوزیترون باید باشند تا پاستگی بار حفظ شود و یک نوترینو یا پاد نوترینو تا عدد لپتونی پایسته بماند. پایستگی عدد لپتونی به معنای تعداد برابر لپتون‌ها و پاد لپتون‌ها است و یک پوزیترون همراه با یک نوترینو و یک الکترون همراه با یک پاد نوترینو خواهد بود.

$$\begin{aligned} X & \frac{\text{جرم کل هیدروژن}}{\text{جرم کل گاز}} \\ Y & \frac{\text{جرم کل هلیوم}}{\text{جرم کل گاز}} \\ Z & \frac{\text{جرم کل عناصر فلزی}}{\text{جرم کل گاز}} \end{aligned} \quad (۴۵.۱)$$

وزن مولکولی متوسط جرم متوسط یک ذره آزاد در گاز بر حسب واحد جرم هیدروژن است.

$$\frac{m}{m_H}; \quad m_H = 1.673532499 \cdot 10^{-27} \text{kg} \quad (۴۶.۱)$$

^۱ باریون در زبان یونانی به معنای سنگین است.
^۲ در یونانی به معنی سبک

برای گاز خنثی^۳ داریم

$$m_n = \frac{P}{\rho} \frac{N_j m_j}{N_j} \quad (47.1)$$

m_j و N_j جرم و تعداد کل اتم‌های نوع j در یک گاز هستند. با تقسیم کردن دو طرف بر m_H داریم

$$n = \frac{P}{\rho} \frac{N_j A_j}{N_j} \quad (48.1)$$

که $m_j = m_H$ A_j است. برای یک گاز کاملاً یونیده^۴ داریم

$$i = \frac{P}{\rho} \frac{N_j A_j}{N_j (1 + Z_j)} \quad (49.1)$$

$1 + Z_j$ تعداد ذرات هسته به اضافه‌ی الکترون‌های آزاد برای یک اتم کاملاً یونیده از نوع j را نشان می‌دهد. با معکوس کردن عبارت m می‌توان معادلات دیگری برای بر حسب کسر جرم‌ها نوشت. به یاد داریم که $m = m_H$ برای یک گاز خنثی می‌دهد

$$\frac{1}{n m_H} = \frac{P}{\rho} \frac{N_j}{N_j m_j} = \frac{\text{تعداد کل ذرات}}{\text{جرم کل گاز}} = \frac{Z_j \text{ تعداد ذرات } j}{Z_j \text{ جرم ذرات } j} = X_j \frac{N_j}{N_j A_j m_H} X_j = X_j \frac{1}{A_j m_H} X_j$$

برای گاز خنثی

$$\frac{1}{n} = X_j \frac{1}{A_j} X_j \quad (50.1)$$

از آنجا که جرم هلیوم ۴ برابر جرم هیدروژن است می‌توانیم بر حسب کسر جرم‌های هیدروژن، هلیوم و عناصر فلزی بنویسیم:

$$\frac{1}{n} = X + \frac{1}{4} Y + h \frac{1}{A} i_n Z \quad (51.1)$$

$h1 = A i_n$ متوسط وزنی تمام عناصر سنگین‌تر از هلیوم است. برای خورشید داریم 15:5 $h1 = A i_n$. برای گاز کاملاً یونیده عبارت مشابه را می‌توان نوشت

$$\frac{1}{i} = X_j \frac{1 + Z_j}{A_j} X_j \quad (52.1)$$

اگر گاز متشکل از هیدروژن، هلیوم و عناصر سنگین‌تر باشد؛

$$\frac{1}{i} = 2X + \frac{3}{4} Y + h \frac{1 + Z}{A} i_i Z \quad (53.1)$$

gas Neutral^۳
gas Ionized^۴

برای عناصر بسیار سنگین‌تر از هلیوم می‌توان تقریب زد $Z_j \approx 1 + Z_j$ که Z_j تعداد پروتون‌های هسته را نشان می‌دهد. همچنین داریم $2Z_j \approx A_j$ و بنابراین می‌توان نوشت

$$h \frac{1+Z_j}{A_j} \approx \frac{1}{2}$$

اگر چگالی توده در بخشی از ستاره و چگالی جزئی i امین نوع هسته i باشد، کسر جرم این نوع از هسته می‌شود

$$X_i = \frac{i}{2} \quad (54.1)$$

و چگالی تعداد (تعداد هسته در واحد حجم) برابر است با چگالی جزئی تقسیم بر جرم یک هسته. جرم یک هسته‌ی اتمی کمی کمتر از مجموع جرم‌های پروتون‌ها و نوترون‌های سازنده به عنوان ذره آزاد است. اما، به عنوان یک تقریب مناسب می‌توان نوشت

$$n_i = \frac{i}{A_i m_H} \quad (55.1)$$

که m_H واحد جرم اتمی نشان‌دهنده‌ی جرم یک نوکلئون است، که معمولاً به صورت یک دوازدهم جرم یک هسته‌ی کربن تعریف می‌شود. علی‌رغم نویسه‌ی m_H کمی از جرم پروتون و جرم هیدروژن اتمی متفاوت است. از ترکیب معادلات ۵۴.۱ و ۵۵.۱ روابط زیر را بدست می‌آوریم

$$n_i = \frac{X_i}{m_H A_i}; \quad X_i = n_i \frac{A_i}{m_H} \quad (56.1)$$

۸.۱ مقیاس زمان‌های مشخصه‌ی تحول ستاره‌ای

تحول ستاره‌ای با سه مجموعه معادله‌ی زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Gm}{r^2} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho + P \right) &= q \quad \frac{\partial F}{\partial m} \\ X &= f(T, X) \end{aligned} \quad (57.1)$$

در هر یک از این سه معادله با تغییرات گوناگون مواجه هستیم: اولین معادله به صورت دینامیکی یا تغییرات ساختاری را شامل می‌شود، دومی تغییرات گرمایی و معادله‌ی سوم با فرآیندهای هسته‌ای منجر به تغییرات شیمیایی سر و کار دارد. هر تغییر، یا فرآیند، مقیاس زمانی مختص به خود را دارد، که می‌تواند به عنوان نسبت کمیت و نرخ تغییرات کمیت – تعریف شود:

$$\tau = \frac{1}{\text{rate}} \quad (58.1)$$

ساده‌ترین مثال حرکت است که طول زمان آن یا مقیاس زمان مشخصه یعنی فاصله تقسیم بر سرعت داده می‌شود.

۱.۸.۱ مقیاس زمان دینامیکی

می‌توانیم تغییر در ساختار یک ستاره با تقارن کروی را به عنوان یک تغییر در ابعاد مشخصه با شعاع R در نظر بگیریم. در این مورد می‌توانیم $R =$ بگیریم. چنان‌که گرانش نیروی نگهدارنده‌ی ستاره است، نرخ تغییرات R سرعت مشخصه در یک میدان گرانشی است: سقوط آزاد یا سرعت فرار $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ ؛ بنابراین $\frac{R}{2GM} =$ مقیاس زمان دینامیکی بنابراین تخمین زده می‌شود

$$\tau_{dyn} \frac{R}{v_{esc}} = \frac{R^3}{2GM} \quad (۵۹.۱)$$

و یا بر حسب چگالی متوسط $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$ ، با صرف نظر از برخی ضرایب مرتبه یک

$$\tau_{dyn} = \frac{1}{\rho G} \quad (۶۰.۱)$$

روش‌های مختلفی برای بدست آوردن مقیاس زمانی دینامیکی وجود دارد، اما همگی منجر به یک نتیجه می‌شوند با اختلاف کوچک در ضرایب. زمان دینامیکی خورشید $100s$ (تقریباً یک چهارم ساعت) است و به طور کلی

$$\tau_{dyn} \approx 1000 \frac{R^3}{M} \frac{M}{M_\odot} \frac{1}{R_\odot^3} \quad (۶۱.۱)$$

زمان دینامیکی بسیار کوچک است، چندین مرتبه بزرگی کوتاه‌تر از عمر معمول ستاره است. برای مثال، سن خورشید تقریباً 4.6×10^9 سال، یا $10^{17} s$ ، حدود 10^{14} dyn است. اما معنای این نتیجه چیست؟ یک فرآیند دینامیکی در یک ستاره هر کجا که نیروی گرانش با نیروهای فشار برابر نباشد رخ می‌دهد. چنین وضعیتی می‌تواند به انقباض نیز گسترش یابد، اگر فشار ناکافی برای مقابله با گرانش وجود نداشته باشد یا به انبساط، اگر فشار خیلی زیاد باشد.

۲.۸.۱ مقیاس زمانی گرمایی

فرآیندهای گرمایی انرژی درونی ستاره را مورد تأثیر قرار می‌دهند؛ بنابراین در این مورد می‌توانیم در نظر بگیریم $U =$ از قضیه‌ی ویریال GM^2/R . نرخ مشخصه تغییر U نرخ انرژی است که توسط ستاره تابش می‌شود بنابراین $L =$ مقیاس زمان دینامیکی بنابراین تخمین زده می‌شود

$$\tau_{th} = \frac{U}{L} = \frac{GM^2}{RL} \quad (۶۲.۱)$$

برای خورشید $10^{15} s$ یا حدود 30 میلیون سال است و در حالت کلی

$$\tau_{th} \approx 10^{15} \frac{M}{M_\odot} \frac{R}{R_\odot} \frac{L}{L_\odot} \quad (۶۳.۱)$$

مقیاس زمانی گرمایی چندین مرتبه بزرگ‌تر از مقیاس زمان دینامیکی است، اما همچنان کسری از گستره عمر یک ستاره را تشکیل می‌دهد. بنابراین، اگرچه قادر نیستیم توسعه‌ی یک فرآیند گرمایی در یک ستاره را مشاهده نماییم، ممکن است فرض نماییم در بیشتر عمل یک ستاره در حالت تعادل گرمایی است. اگر ستاره هم در تعادل گرمایی و هم هیدروستاتیک در طی یک فاز تحولی بماند، انرژی کل طی آن فاز پایسته است و از قضیه‌ی ویریال،

انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی گرمایی هر کدام پایسته‌اند. بنابراین اگر انقباض (به صورت شبه ایستا) رخ دهد در برخی بخش‌های ستاره، بخش‌های دیگر ستاره باید منبسط شوند تا انرژی پتانسیل گرانشی پایسته بماند. به طور مشابه اگر دما در نقاطی افزایش یابد در نقاط دیگر باید کاهش یابد تا U ثابت بماند. مقیاس زمانی می‌تواند به عنوان زمانی که طول می‌کشد تا یک ستاره کل انرژی گرمایی ذخیره شده طی انقباض را تابش نماید در صورتی که درخشندگی‌اش ثابت بماند تفسیر شود. این مقیاس زمانی به دلیل کار مستقل کلونین و هلمهولتز به عنوان مقیاس زمانی کلونین- هلمهولتز شناخته می‌شود.

۳.۸.۱ مقیاس زمانی هسته‌ای

کمیتی که طی فرآیندهای هسته‌ای در کنار فراوانی تغییر می‌کند، یک کسر کوچک از انرژی جرم سکون است که با رابطه‌ی اینشتین $E = mc^2$ داده می‌شود. این کسر، که ممکن است به دیگر شکل‌های انرژی در بیاید، انرژی پتانسیل سکون را تشکیل می‌دهد. بنابراین می‌توان در نظر گرفت $Mc^2 =$ که " می‌تواند با انرژی بستگی معمول یک نوکلئون تقسیم بر انرژی حالت سکون نوکلئون که از مرتبه‌ی 10^3 است تخمین زده شود. نرخ تغییرات انرژی پتانسیل هسته‌ای واضحاً، درخشندگی هسته‌ای L_{nuc} و چون مجاز هستیم تعادل گرمایی را فرض کنیم می‌توان گرفت $L_{nuc} = L$. بنابراین

$$L_{nuc} = \frac{Mc^2}{L} \quad (64.1)$$

بر حسب واحدهای خورشید

$$L_{nuc} = 4.5 \times 10^{20} \frac{M}{M_{\odot}} \frac{L}{L_{\odot}} \quad (65.1)$$

برای خورشید، این چند برابر سن آن است؛ در واقع L_{nuc} بزرگ‌تر از سن تخمین زده شده برای کیهان است. یک نتیجه‌ی فوری این است که به نظر می‌رسد ستاره‌ها تنها کسر کوچکی از انرژی هسته‌ای موجودشان را مصرف کرده‌اند که بدین معناست تنها کسر کوچکی از جرم ستاره‌ای ترکیب شیمیایی‌اش عوض شده است. نکته دیگر این‌که، به طور کلی تعادل هسته‌ای را انتظار نداریم. نتایج به طور خلاصه

$$L_{dyn} \ll L_{th} \ll L_{nuc} \quad (66.1)$$

در نتیجه، نرخ فرآیندهای هسته‌ای است که سرعت تحول ستاره‌ای را تعیین می‌نماید.

۹.۱ تعادل هیدروستاتیک در نسبیت عام

در اینجا به اختصار به معادله حالت ناشی از اثرات نسبیت عامی می‌پردازیم. میدان‌های گرانشی بسیار قوی، مانند ستاره‌های نوترونی، با معادلات میدان اینشتین توصیف می‌شوند

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{ik}; \quad (67.1)$$

که در این رابطه R_{ik} تانسور ریچی، g_{ik} تانسور متریک و R انحنا ی ریمان هستند. مؤلفه‌های غیر صفر تانسور انرژی-تکانه، برای گاز کامل هستند: $T_{00} = \rho c^2$; $T_{11} = T_{22} = T_{33} = P$. حالتی را بررسی می‌کنیم که ایستا (مستقل از زمان) باشد و توزیع جرم با تقارن کروی داشته باشد. در نتیجه عنصر طول فضا-زمان ds

در مختصات کروی به صورت زیر داده می‌شود

$$ds^2 = e^{(r)} c^2 dt^2 - e^{(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (۶۸.۱)$$

با استفاده از این عبارات برای T_{ik} و ds معادلات میدان ۶۷.۱ به سه معادله دیفرانسیل عادی تقلیل می‌یابد

$$\frac{P}{c^2} = e^{(r)} \left(\frac{0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{r^2} \quad (۶۹.۱)$$

$$\frac{P}{c^2} = \frac{1}{2} e^{(r)} \left(\frac{0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{r^2} \quad (۷۰.۱)$$

$$= e^{(r)} \left(\frac{0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{r^2} \quad (۷۱.۱)$$

که علامت ^۰ نشان‌گر مشتق نسبت به r است. اگر $4r^2$ را در آخرین بالا ضرب کنیم بدست می‌آید

$$m = 4r^2 (1 - e^{(r)}) \quad (۷۲.۱)$$

که m جرم گرانشی در شعاع r است

$$m = \int_0^r 4r^2 dr \quad (۷۳.۱)$$

در شعاع $r = R$ ، m برابر جرم گرانشی کل ستاره M می‌شود. این جرم در واقع جرمی است که ناظر دوردست از میدان گرانشی اندازه می‌گیرد. اما، این جرم آن چیزی نیست که ما از روی تعداد باریون‌های ستاره ضرب در واحد جرم اتمی اندازه می‌گیریم: M فقط شامل جرم سکون نیست، بلکه شامل کل انرژی (ضرب در c^2) است. این انرژی شامل انرژی درونی و انرژی گرانشی است که دومی منفی است و جرم گرانشی را کاهش می‌دهد. در رابطه‌ی ۷۳.۱ باید توجه داشته باشیم که $U = c^2$ و $U = 0$ حاوی تمام چگالی انرژی U و چگالی جرم سکون ρ_0 است و متریک تغییر یافته عنصر حجم کروی $e^{(r)} = 4r^2 dr$ به جای شکل معمول آن یعنی $4r^2 dr$ می‌دهد. با مشتق گرفتن از معادلات ۶۹.۱ نسبت به r فشار بدست می‌آید. با حذف دیگر متغیرها، معادله تولمن-اوپنهاইمر-وولکوف^۵ (TOV) برای تعادل هیدروستاتیک در نسبیت عام بدست می‌آید:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \left(1 + \frac{P}{c^2} \right) \left(1 + \frac{4r^3 P}{mc^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1} \quad (۷۴.۱)$$

این معادله در حد $c^2 \rightarrow 1$ به معادله تعادل هیدروستاتیک غیر نسبیتی تقلیل می‌یابد. برای میدان‌های گرانشی که خیلی بزرگ نیستند (انحراف کمی از مکانیک نیوتنی دارند)، می‌توان معادله بالا را بسط داد و تنها جملات خطی بر حسب $1/c^2$ را نگه داشت. معادله حاصل تقریب پسا-نیوتنی است:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \left(1 + \frac{P}{c^2} + \frac{4r^3 P}{mc^2} + \frac{2Gm}{rc^2} \right) \quad (۷۵.۱)$$

^۵Tolman-Oppenheimer-Volkoff

۱۰.۱ فیزیک مقدماتی گاز و تابش در داخل ستاره

از آنجا که ستاره شامل یون‌ها، الکترون‌ها و فوتون‌هاست، فیزیک داخل ستاره باید با الف) ویژگی‌های سیستم‌های گازی ب) تابش و ج) برهم‌کنش گاز و تابش سازگار باشد. برای آن‌که چندان از چارچوب اصلی خارج نشویم، باید فقط فرایندها و خواصی را بررسی نماییم که به اندازه‌ی کافی ساده هستند تا بدون گسترش فیزیک زمینه قابل درک باشند، و برای نگرش به درون رفتار کلی ستاره کافی باشند. فرایندهای تمام مقیاس دخیل در محاسبات ساختار ستاره و تحول آن روی رایانه‌های بسیار پر قدرت و کدهای عددی پیچیده با شرایط اولیه زیاد انجام می‌شوند.

۱.۱۰.۱ معادله‌ی حالت

رابطه‌ی بین فشار وارد بر سیستم ذرات با ترکیب شیمیایی مشخص و دما و چگالی متعادل $P = P(T, X)$ معادله‌ی حالت خوانده می‌شود.

پیش‌تر فرض کردیم که گاز درون ستاره یک گاز کامل باشد، که دلالت بر این دارد که یک ترکیب از ذرات آزاد، بدون برهم‌کنش است. اکنون زمان توجیه این فرض است. در دماهای درون ستاره‌ای گازها یونیزه هستند و برهم‌کنش کولونی انتظار می‌رود رخ دهد. باید نشان دهیم انرژی لازم در چنین برهم‌کنشی در مقایسه با انرژی جنبشی (گرمایی) ذرات کم است. برای یک چگالی متوسط و یک جرم ذره گاز $A m_H$ ، فاصله‌ی میان ذره‌ای هست

$$d = \frac{A m_H}{3M}^{1/3} = \frac{4}{3} \frac{A m_H}{M}^{1/3} R \quad (۷۶.۱)$$

که بر حسب جرم ستاره M و شعاع R بیان شد. اگر بار ذره Ze باشد، انرژی کولونی هر ذره تخمین زده می‌شود

$$c = \frac{1}{4} \frac{Z^2 e^2}{a_0 d} \quad (۷۷.۱)$$

انرژی جنبشی هر ذره از مرتبه‌ی $k_B T$ است و بنابراین

$$\frac{c}{k_B T} = \frac{1}{4} \frac{Z^2 e^2}{a_0 A^{4/3} m_H^{4/3} = 3GM^{2/3}} \quad (۷۸.۱)$$

به ازای $Z = 1$ ، $A = 1$ و $M = M_\odot$ این کسر حدود ۱٪ است و با این دقت از برهم‌کنش کولنی می‌تواند صرف‌نظر شود. برای Z های بالاتر، داریم $A = 2Z$ و کسر بالا که به صورت $Z^{2/3}$ تغییر می‌کند، همچنان زیر مقدار واحد باقی می‌ماند حتی برای یک ترکیب خالص از یون‌ها. اما باید توجه کرد که برای جرم $M = 10^3 M_\odot$ داریم $c = k_B T$ و اگرچه ستاره‌ها به این ناحیه‌ی خطرناک تعلق ندارند اما سیاره‌ها هستند؛ جرم سیاره مشتری تقریباً $10^3 M_\odot$ است. در نتیجه، ساختار سیارات نمی‌تواند با یک ترکیب از گاز آزاد توصیف شود بلکه معادلات پیچیده‌تری نیاز هستند. از آنجا که $c = k_B T$ جامدات را مشخص می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که سیاره با جرم کمتر ساختار آن به جامد نزدیک است. یک قضیه‌ی کلی ما را قادر می‌سازد تا فشار یک سیستم از ذرات آزاد را توسط انتگرال فشار محاسبه نماییم:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^Z v p n(p) dp \quad (۷۹.۱)$$

که v سرعت ذره و p تکانه‌ی آن و $n(p)dp$ تعداد ذرات در واحد حجم با تکانه‌هایی بین $(p; p+dp)$ است. اثبات این قضیه به این صورت است: یک سطح فرضی درون سیستمی از ذرات در نظر گیرید. فشار روی این سطح ناشی از تکانه‌های اعمال شده توسط ذرات برخورد کننده به صورت کشسان است. تکانه منتقل شده توسط یک ذره فرودی دو برابر مؤلفه تکانه عمود بر سطح است

$$p = 2p \cos \theta \quad (۸۰.۱)$$

یک پرتو از ذرات که به سطح با سرعت v و زاویه‌ی نسبت عمود برخورد می‌کنند را تصور نمایید. $n(p; p+dp)dp$ چگالی تعداد ذراتی است با تکانه در بازه‌ی $(p; p+dp)$ و در جهت مخروط با زاویه‌ی $(\theta; \theta+d\theta)$. چون توزیع ذرات همسان‌گرد است، تعداد ذرات درون زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ متناسب با زاویه‌ی فضایی است یا

$$\frac{n(p; p+dp)dp}{n(p)dp} = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\sin \theta d\theta}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \quad (۸۱.۱)$$

تعداد ذراتی از این پرتو که به سطح در بازه‌ی زمانی t برخورد می‌کنند با چگالی تعداد ضرب در حجم $v t dS \cos \theta$ داده می‌شود که dS مساحت ناحیه فرود پرتو روی آن است. بنابراین تکانه منتقل شده به سطح توسط این ذرات هست

$$dp = n(p; p+dp)dp v t dS \cos \theta \quad (۸۲.۱)$$

بنابراین سهم این ذرات در فشار-تکانه منتقل شده در واحد زمان در واحد سطح- با رابطه‌ی ۸۲.۱ و ترکیب معادلات ۸۰.۱ و ۸۱.۱ تقسیم بر tdS بدست می‌آید:

$$dP = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta n(p)dp v \cos \theta = v p n(p)dp \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (۸۳.۱)$$

و فشار کل با انتگرال‌گیری روی زوایای فرود و تمام تکانه‌ها بدست می‌آید. چون

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_0^1 \cos^2 \theta d\cos \theta = \frac{1}{3} \quad (۸۴.۱)$$

اثبات کامل است.

واضح است، فشار یک مخلوط از ذرات بدون برهم‌کنش و آزاد از گونه‌های مختلف به صورت مجموع فشارهای وارد از هر یک از گونه‌ها است. این شامل فشار تابش، که توسط فوتون‌ها اعمال می‌شود نیز هست. در نهایت، در ستاره‌ها، P جمع سه جمله فشار خواهد بود: P_I برای یون‌ها، P_e برای الکترون‌ها و P_{rad} برای فوتون‌ها، دو تای اول فشار گاز را می‌سازند

$$P = P_I + P_e + P_{rad} = P_{gas} + P_{rad} \quad (۸۵.۱)$$

متداول است که پارامتر به عنوان کسر فشار سهم گاز تعریف شود؛

$$P_{gas} = \beta P \quad (۸۶.۱)$$

$$P_{rad} = (1 - \beta)P \quad (۸۷.۱)$$

۲.۱۰.۱ فشار یون

معادله‌ی حالت برای یک گاز یونی کامل با رابطه زیر داده می‌شود

$$P_I = n_I k_B T \quad (۸۸.۱)$$

که n_I تعداد یون‌ها در واحد حجم است. این رابطه با اعمال قضیه به یک گاز با ذرات آزاد در تعادل ترمودینامیک، که با توزیع سرعت ماکسولی مشخص می‌شود بدست آمده است:

$$n(p)dp = \frac{n_I 4 p^2 dp}{(2 m_I k_B T)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2 m_I k_B T}} \quad (۸۹.۱)$$

با استفاده از روابطی که قبلاً تعریف کردیم، تعداد کل یون‌ها در واحد حجم با جمع زدن روی همه گونه‌ها بدست می‌آید:

$$n_I = \sum_i n_i = \sum_i \frac{X_i}{m_H A_i} \quad (۹۰.۱)$$

جرم اتمی متوسط ماده‌ی ستاره‌ای I تعریف می‌شود

$$\frac{1}{I} = \sum_i \frac{X_i}{A_i} \quad (۹۱.۱)$$

بنابراین

$$n_I = \frac{1}{I m_H} \quad (۹۲.۱)$$

و I تخمین زده می‌شود

$$\frac{1}{I} = X + \frac{1}{4}Y + \frac{1}{h A_i} \sum X_i Y_i \quad (۹۳.۱)$$

که $h A_i$ جرم اتمی متوسط عناصر سنگین (عناصری به غیر از هیدروژن و هلیوم) است. به طور مثال برای خورشید، $X = 0.707$ ، $Y = 0.274$ و $h A_i = 20$ است؛ پس $I = 1.29$. نسبت $k_B = m_H$ معمولاً به عنوان ثابت گاز کامل شناخته می‌شود

$$R = \frac{k}{m_H} \quad (۹۴.۱)$$

با جای‌گذاری معادلات سرانجام بدست می‌آوریم

$$P_I = \frac{R}{I} T \quad (۹۵.۱)$$

۳.۱۰.۱ فشار الکترونی

اگر الکترون‌ها یک گاز کامل تشکیل دهند، معادله‌ی حالت را می‌توان نوشت

$$P_e = n_e k_B T \quad (96.1)$$

که n_e چگالی تعداد الکترون‌ها در واحد حجم است. در این جا یک فرض ساده کننده داریم که اتم‌ها را کاملاً یونیده در نظر می‌گیریم. این فرض مطمئناً برای اجزای اصلی سازنده‌ی ستاره یعنی هیدروژن و هلیوم درست است چرا که دماهایی بیش از $10^6 K$ در ستاره‌ها داریم. این فرض به وضوح در فوتوسفر ناصحیح است، اما ما فعلاً به درون ستاره کار داریم. با این فرض، تعداد کل الکترون‌ها در واحد حجم هست

$$n_e = \sum_i Z_i n_i = \frac{X}{m_H} \sum_i X_i \frac{Z_i}{A_i} \quad (97.1)$$

کمیت e^{-1} تعداد متوسط الکترون‌های آزاد به ازای هر نوکلئون است

$$\frac{1}{e} = \sum_i X_i \frac{Z_i}{A_i} \quad (98.1)$$

که منتج می‌شود

$$n_e = \frac{X}{e m_H} \quad (99.1)$$

بر حسب کسرهای جرم X و Y داریم

$$\frac{1}{e} = X + \frac{1}{2}Y + (1 - X - Y) \frac{Z}{A} \quad (100.1)$$

که $\frac{Z}{A}$ مقدار متوسط برای فلزات است که با تقریب معقولی هست $\frac{1}{2}$. بنابراین

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2}(1 + X) \quad (101.1)$$

که برای خورشید $1:17$ e^{-} و برای ستاره‌های تهی از هیدروژن 2 e^{-} است. فشار الکترون از رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$P_e = \frac{R}{e} T \quad (102.1)$$

از ترکیب معادلات برای کل گاز بدست می‌آید

$$P_{\text{gas}} = P_l + P_e = \frac{1}{l} + \frac{1}{e} R T = \frac{R}{e} T \quad (103.1)$$

که

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \quad (104.1)$$

برای ترکیبات خورشید می‌شود $0.61 =$. برای هیدروژن سهم الکترون‌ها و یون‌ها در فشار گاز برابر است؛ برای عناصر سنگین‌تر، فشار الکترونی از فشار یون‌ها بیشتر است. فرض‌هایی که تا اینجا داشته‌ایم (الف) نبود برهمکنش بین ذرات گاز (ب) یونیزاسیون کامل. تا این‌جا با فیزیک کلاسیک کار کرده‌ایم و از اثرات کوانتومی و نسبیتی صرف‌نظر نموده‌ایم. اما شرایط داخل ستاره طوری است که نمی‌توان همیشه از اثرات غیر کلاسیکی چشم‌پوشید.

طبق مکانیک کوانتومی، مکان و تکانه‌ی یک ذره را به طور همزمان نمی‌توان دقیق‌تر از مقداری که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ اعمال می‌کند اندازه گرفت. به طور خاص، اگر مکان ذره درون یک جزء حجم V مشخص باشد و تکانه‌اش در فضای سه بعدی تکانه 3p معلوم باشد شرط زیر طبق اصل عدم قطعیت باید برقرار باشد

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{2} \quad (1.5.1)$$

حال یک گاز الکترونی ایده‌آل به دمای T در نظر بگیرید؛ دما توزیع تکانه ذرات را مشخص می‌کند. به ویژه، تکانه (سرعت) متوسط به طور منحصر بفرد با دمای T تعیین می‌شود. حال فرض کنیم گاز فشرده شده است. حجم اشغال شده توسط هر ذره $1/V$ کاهش می‌یابد. تا زمانی که دما به اندازه‌ی کافی زیاد باشد، انقباض منجر به نقض اصل هایزنبرگ نمی‌شود و باید از اثرات کوانتومی صرف‌نظر کنیم. اما نهایتاً، چگالی ممکن است به اندازه‌ی کافی زیاد شود و در بازه‌ی مربوط به اصل عدم قطعیت قرار بگیرد و از تکانه متناظر با دمای گاز فراتر رود. در عمل، این بدان معناست که فشار الکترون بیشتر از چیزی است که از دما بدست می‌آید. برای تخمین فشار الکترون تحت چنین شرایطی، باید دیگر اصول مکانیک کوانتومی، یعنی اصل طرد پائولی را به میان آوریم که بیان می‌کند هیچ دو الکترونی که حالت کوانتومی یکسانی را اشغال می‌کنند، تکانه و اسپین یکسان ندارند. چون الکترون می‌تواند دو حالت اسپینی (بالا و پایین) داشته باشد، به این معناست که هر جزئی از فضای فاز- فضای مکان یا تکانه- می‌تواند تنها با دو الکترون حداکثر اشغال شود. فشار تولید شده توسط الکترون‌ها که به حالت‌های با تکانه بالا رسیده‌اند چون چگالی افزایش یافته به فشار تبهگنی مشهور است. یک حالت کاملاً تبهگن وقتی حاصل می‌شود که تمام حالت‌های در دسترس تکانه تا حداکثر مقدار ممکن اشغال شوند. در این حالت 3p کمینه است و شرط عدم قطعیت یک تساوی می‌شود. چنین وضعیتی ایده‌آلی فقط در دمای صفر بدست می‌آید، اما یک تقریب خوب برای حالت‌های با تبهگنی بالا می‌سازد و محاسبه‌ی فشار را سرراست می‌نماید. بنابراین، اگرچه گذار از یک وضعیت ماکسولی به توزیع تکانه‌ی کاملاً تبهگن به تدریج رخ می‌دهد، اما ما وضعیت نهایی را بحث می‌نماییم.

با به کار بردن اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و طرد پائولی برای یک گاز الکترونی کاملاً تبهگن و همسان‌گرد توزیع تکانه می‌شود

$$n_e(p)dp = \frac{2}{V} = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp; \quad p \geq p_0 \quad (1.6.1)$$

بیشینه تکانه‌ی p_0 با انتگرال‌گیری $n_e = \int_0^{p_0} n_e(p) dp$ بدست می‌آید، با معکوس کردن رابطه داریم:

$$p_0 = \left(\frac{3h^3 n_e}{8} \right)^{1/3} \quad (1.7.1)$$

با استفاده از انتگرال فشار و رابطه‌ی $1.6.1$ و رابطه‌ی $v = p/m_e$ و انتگرال‌گیری تا p_0 ، فشار تبهگنی یک گاز الکترونی بدست می‌آید

$$P_{e;deg} = \frac{8}{15m_e h^3} p_0^5 = \frac{h^2}{20m_e} \frac{3}{2} \frac{1}{m_H^{5/3}} \frac{1}{e} \quad (1.8.1)$$

توجه داشته باشید که فشار تبهگنی متناسب با معکوس جرم (الکترون) است. در نتیجه، اگرچه بحثی که برای الکترون داشتیم می‌تواند برای پروتون و نوترون‌ها نیز بطور مشابه انجام شود اما با توجه به این که این ذرات ۲۰۰۰ برابر جرم الکترون هستند شرایط برای بروز اثرات کوانتومی کمی تغییر می‌کند (در یک دمای معین، چگالی بسیار بالاتر و در یک چگالی معین دمای پایین‌تر). همچنین دقت نمایید که علی‌رغم چگالی‌های بالا که مشخصه‌ی ماده‌ی تبهگن است، ذرات می‌توانند همچنان آزاد تلقی شوند، چون انرژی ذره از مرتبه‌ی $p_0^2 = 2m_e$ همچنان بیشتر از انرژی کولنی c است. با احتساب ضرایب عددی ثابت در معادله‌ی ۱۰۸.۱ بدست می‌آید

$$P_{e;deg} = K_1^0 \frac{5=3}{e} \quad (109.1)$$

که $K_1^0 = 1:00 \cdot 10^7 \frac{Nm^{-2}}{(kgm^{-3})^{5=3}}$ است. برای یک ساختار تهی از هیدروژن ۲ e است، و بنابراین فشار تبهگنی به صورت ساده‌تر می‌شود

$$P_{e;deg} = K_1^{5=3} \quad (110.1)$$

که K_1 یک ثابت است. اگر چگالی الکترون باز هم بیشتر شود، بیشینه‌ی تکانه در گاز الکترونی کاملاً تبهگن بیشتر رشد می‌کند. سرانجام، به چگالی می‌رسد که سرعت $p_0 = m_e$ به سرعت نور می‌رسد. اکنون الکترون‌ها یک گاز نسبیاتی تبهگن ساخته‌اند، که روابط دینامیک نسبیاتی بین ذرات برقرار است. در این جا برای سادگی مجدداً حالت حدی را که سرعت خیلی نزدیک به c سرعت نور می‌شود را بررسی می‌کنیم. با جابجایی v و c در انتگرال فشار رابطه‌ی مشابهی بدست می‌آید

$$P_{e;r deg} = \frac{hc}{8} \frac{3^{1=3}}{m_H^{4=3}} \frac{1}{e^{4=3}} \quad (111.1)$$

که برای یک گاز کاملاً تبهگن در حد سرعت c ! v برقرار می‌باشد.

۱۱.۱ معادله بولتزمان و معادله ساها

فرض می‌کنیم اتم‌های یک عنصر شیمیایی در حالت یونیزاسیون مشخص، در یک واحد حجم از گاز در تعادل ترمودینامیک هستند. اتم‌ها در حالت‌های برانگیخته‌ی مختلفی توزیع شده‌اند که با زیرنویس s نمایش می‌دهیم، و این حالت‌های مختلف می‌توانند چنان تبهگن باشند که حالت شماره s در واقعیت شامل g_s زیرحالت باشد. عدد g_s را وزن آماری حالت می‌گویند. اتم‌هایی را در نظر بگیریم که در حالت s و حالت پایه‌ی $s = 0$ قرار دارند که با اختلاف انرژی s از طریق جذب یا نشر فوتون‌ها بین این حالت‌ها گذار می‌کنند. در حالت تعادل، نرخ چنین گذارهای بالاسویی برابر با نرخ گذارهای پایین‌سو است. به همین جهت، نسبت بین تعداد اتم‌های در دو حالت را به این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{n_s}{n_0} = \frac{g_s}{g_0} e^{-\frac{s}{k_B T}} \quad (112.1)$$

معادله‌ی ۱۱۲.۱ به عنوان معادله‌ی بولتزمان^۶ شناخته می‌شود. این معادله توزیع ذرات در حالت‌های با

^۶Ludwig Boltzmann (1844-1906)

انرژی‌های متفاوت را بیان می‌کند.

حال می‌خواهیم به جای اتم‌های حالت پایه، تعداد اتم‌ها در حالت دلخواه s را با تعداد n از کل اتم‌های همان عنصر مقایسه نماییم:

$$n = \sum_s X n_s \quad (113.1)$$

از معادله‌ی ۱۱۲.۱ می‌دانیم:

$$g_0 \frac{n}{n_0} = g_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{n_s}{n_0} = g_0 + g_1 e^{-1/k_B T} + g_2 e^{-2/k_B T} + \dots = u_p \quad (114.1)$$

کمیت $u_p = u_p(T)$ تابع پارش^۷ نامیده می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی ۱۱۲.۱ و ۱۱۴.۱ معادله‌ی بولتزمان را به این شکل نیز می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{n_s}{n} = \frac{g_s}{u_p} e^{-s/k_B T} \quad (115.1)$$

ما همچنین می‌توانیم از معادله‌ی بولتزمان استفاده نماییم تا مرتبه یونیزاسیون اتم‌ها را تعیین نماییم، اما تفاوت‌هایی بین برانگیختگی و یونیزاسیون وجود دارد که باید دقت نماییم. برانگیختگی فقط برای یون‌ها و الکترون‌های مقید به که در حالت‌هی گسسته توزیع شده‌اند اتفاق می‌افتد اما در حالت یونیزاسیون، اتم اولیه به دو ذره‌ی جدا از هم یعنی الکترون و یون تبدیل می‌شود؛ و الکترون آزاد منیفلد پیوسته‌ای از حالت‌ها را شامل می‌شود. بعد از یونیزاسیون، الکترون آزاد شده می‌تواند مقادیر دلخواهی از انرژی جنبشی داشته باشد، و بازترکیب الکترون‌ها با هر انرژی دلخواهی می‌تواند با یون‌ها اتفاق بیافتد.

اگر یک اتم به اندازه‌ی r الکترون از دست داده باشد می‌گوییم اتم در حالت r ام از برانگیختگی است. انرژی لازم برای کندن الکترون بعدی از حالت پایه r می‌نامیم. بعد از یونیزاسیون الکترون دیگر در حال سکون نیست، و یک تکانه نسبت به اتم به اندازه‌ی p_e دارد. بنابراین انرژی جنبشی الکترون هست $p_e^2 = (2m_e)$ ؛ در نتیجه الکترون آزاد نسبت حالت مقید اولیه انرژی به اندازه‌ی $p_e^2 = (2m_e) + r$ دارد، و حالت یونیزاسیون اتم اولیه مرتبه‌ی $r + 1$ ام است.

اگر فرض نماییم که حالت اولیه یک یون r مرتبه یونیزه باشد. حالت بعدی می‌تواند یک یون $r + 1$ مرتبه یونیزه به اضافه الکترون آزادی با تکانه‌ای بین $[p_e; p_e + dp_e]$ باشد. چگالی تعداد یون‌ها در این دو حالت n_r و dn_{r+1} است. وزن آماری حالت بالاتر حاصل ضرب وزن آماری یون g_{r+1} و الکترون آزاد $dg(p_e)$ است. گذارهای بالاسو و پایین سو بین دو حالت با نرخ یکسان اتفاق می‌افتند. در تعادل ترمودینامیکی معادله‌ی بولتزمان (۱۱۲.۱) به شکل زیر می‌تواند نوشته شود

$$\frac{dn_{r+1}}{n_r} = \frac{g_{r+1} dg(p_e)}{g_r} \exp \left(-\frac{r + p_e^2 = (2m_e)}{k_B T} \right) \quad (116.1)$$

⁷Partition function

گام بعدی محاسبه وزن آماری الکترون $dg(p_e)$ در بازه‌ی تکانه‌ی $[p_e; p_e + dp_e]$ است. اصل طرد پائولی در مکانیک کوانتومی می‌گوید در فضای فاز درون یک عنصر حجم $dV d^3p = dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3$ می‌تواند تا $2dV d^3p = h^3$ الکترون را شامل شود، یعنی تا دو الکترون در هر واحد کوانتومی حجم h^3 . در این متن p و q متغیرهای مکان و تکانه در فضای (۶- بعدی) فاز است، و dV و d^3p حجم فضای مکان و فضای تکانه است و $h = 6.62620 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ ثابت پلانک نام دارد. پس

$$dg(p_e) = \frac{2dV d^3p_e}{h^3} \quad (117.1)$$

اگر چگالی الکترون در فضای (سه بعدی) n_e باشد، برای هر الکترون فضای $dV = 1/n_e$ در دسترس است، در حالی که حجم (سه بعدی) فضای تکانه که شامل همه نقاطی است که در بازه‌ی $[p_e; p_e + dp_e]$ قرار می‌گیرند برابر است با $d^3p_e = 4\pi p_e^2 dp_e$ ، تمامی این نقاط روی یک پوسته‌ی کروی به شعاع p_e و ضخامت dp_e واقع‌اند. بنابراین برای وزن آماری الکترون داریم

$$dg(p_e) = \frac{8\pi p_e^2 dp_e}{n_e h^3} \quad (118.1)$$

و از معادله‌ی ۱۱۶.۱ نتیجه می‌شود

$$\frac{dn_{r+1}}{n_r} = \frac{g_{r+1}}{g_r} \frac{8\pi p_e^2 dp_e}{n_e h^3} \exp \left(-\frac{r + p_e^2/(2m_e)}{k_B T} \right) \quad (119.1)$$

تمام حالت‌های بالاتر (یون‌های مرتبه‌ی یونیزاسیون $r+1$ در حالت پایه و الکترون‌های آزاد با همه‌ی تکانه‌های موجود) با انتگرال‌گیری روی تکانه‌ی p_e بدست می‌آید:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} = \frac{g_{r+1}}{g_r} \frac{8}{n_e h^3} e^{-\frac{r}{k_B T}} \int_0^{\infty} p_e^2 \exp \left(-\frac{p_e^2}{2m_e k_B T} \right) dp_e \quad (120.1)$$

اگر $a > 0$ باشد، برای انتگرال‌های شبه گاوسی داریم:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \quad (121.1)$$

با استفاده از جواب انتگرال، معادله‌ی ۱۲۰.۱ به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{g_{r+1}}{g_r} f_r(T); \quad \text{که} \quad f_r(T) = 2 \frac{(2m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{r}{k_B T}} \quad (122.1)$$

این رابطه معروف به معادله‌ی ساها^۸ است که توسط اخترفیزیکدان هندی مغناد ساها^۸ بدست آمده است. البته هنوز به شکل نهایی آن نرسیده‌ایم چرا که فقط حالت‌های پایه را در نظر گرفته‌ایم. بنابراین، برای دقیق‌تر شدن رابطه، از کمیت‌های $n_{r,0}$ ، $n_{r+1,0}$ ، $g_{r,0}$ ، $g_{r+1,0}$ استفاده می‌کنیم که زیرنویس دوم این کمیت‌ها نشان‌دهنده‌ی

^۸Meghnad Saha (1893-1956)

حالت پایه برای این کمیت‌هاست. از این‌جا به بعد نمادهای $n_{r+1}; n_r; g_{r+1}; g_r$ نماینده چگالی تعداد متوسط یون‌ها و وزن‌های آماری برای همه حالت‌های برانگیختگی است. یک حالت خاص از برانگیختگی با یک زیرنویس دوم نمایش داده می‌شود، $n_{i;k}$ چگالی تعداد اتم‌هایی در حالت i ام از یونیزاسیون و در حالت k ام از برانگیختگی هستند و وزن آماری متناظر $g_{i;k}$ است. معادله‌ی ساها (۱۲۲.۱) را با توجه به این توضیحات می‌توان نوشت

$$\frac{n_{r+1;0}}{n_{r;0}} n_e = \frac{g_{r+1;0}}{g_{r;0}} f_r(T) \quad (123.1)$$

چگالی تعداد یون‌ها در حالت یونیزاسیون r (شامل همه‌ی حالت‌های برانگیختگی) برابر است با

$$n_r = \sum_s n_{r;s} \quad (124.1)$$

با این تعریف می‌توانیم معادله‌ی بولتزمان (۱۱۲.۱) را برای یون‌های با مرتبه‌ی r به این صورت بنویسیم

$$\frac{n_{r;s}}{n_{r;0}} = \frac{g_{r;s}}{g_{r;0}} e^{-\epsilon_{r;s}/k_B T} \quad (125.1)$$

که $\epsilon_{r;s}$ انرژی برانگیختگی حالت s است، پس معادله‌ی (۱۲۴.۱) به این صورت می‌تواند نوشته شود

$$\frac{g_{r;0}}{n_{r;0}} n_r = g_{r;0} \sum_s \frac{n_{r;s}}{n_{r;0}} = g_{r;0} + g_{r;1} e^{-\epsilon_{r;1}/k_B T} + g_{r;2} e^{-\epsilon_{r;2}/k_B T} + \dots = u_r \quad (126.1)$$

که $u_r = u_r(T)$ تابع پارش برای یون‌های مرتبه‌ی r است. از معادله‌ی (۱۲۶.۱) داریم $n_r g_{r;0} = n_{r;0} u_r$ و معادله‌ی ساها برای تمام حالت‌های برانگیختگی به این شکل در می‌آید

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} f_r(T) \quad (127.1)$$

اگر از رابطه‌ی گازها $P_e = n_e k_B T$ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} P_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} 2 \frac{(2 m_e)^{3/2}}{h^3} (k_B T)^{5/2} e^{-\epsilon_r/k_B T} \quad (128.1)$$

۱.۱۱.۱ یونیزاسیون هیدروژن

برای مشاهده نتایج معادله‌ی ساها آن را برای یک گاز هیدروژنی خالص بکار می‌بریم. درجه یونیزاسیون را به صورت زیر تعریف می‌نماییم

$$x = \frac{n_1}{n_0 + n_1} \quad (129.1)$$

به عبارت دیگر: $x = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$ اگر گاز خنثی باشد، $x = 0$ است؛ و اگر کاملاً یونیزه باشد،

$x = 1$ خواهد بود. همچنین طرف چپ معادله‌ی (۱۲۸.۱) می‌تواند با $xP_e = (1-x)$ جایگزین شود، و اگر $n = n_0 + n_1$ تعداد کل اتم‌های هیدروژن باشد، می‌توانیم فشار جزیی الکترون‌ها را به فشار کل گاز مرتبط نماییم:

$$P_e = n_e k_B T = (n + n_e) k_B T \frac{n_e}{n + n_e} = P_{\text{gas}} \frac{n_e}{n + n_e} \quad (130.1)$$

به ازای هر اتم هیدروژن یونیزه شده فقط یک الکترون ($n_e = n_1$) وجود دارد؛ بنابراین

$$P_e = \frac{x}{1+x} P_{\text{gas}} \quad (131.1)$$

و معادله‌ی (۱۲۸.۱) می‌تواند به این شکل نوشته شود

$$\frac{x^2}{1-x^2} = K_H; \quad K_H = \frac{u_1}{u_0} \frac{2}{P_{\text{gas}}} \frac{(2m_e)^{3/2}}{h^3} (k_B T)^{5/2} e^{-u_1/k_B T} \quad (132.1)$$

$H = 13.6\text{eV}$ انرژی یونیزاسیون هیدروژن است. معادله‌ی (۱۳۲.۱) یک معادله‌ی درجه دوم برای مرتبه‌ی یونیزاسیون است اگر T و P_{gas} مشخص باشد. اگر فشار تابشی مهم موثر باشد، کافی است T و فشار کل P داده شود تا فشار گاز P_{gas} بدست آید.

برای محاسبه درجه یونیزاسیون، تابع پارش را باید بدانیم. برای این کار نیاز به دانستن وزن‌های آماری حالت‌های مختلف برانگیختگی داریم، که از مکانیک کوانتومی محاسبه می‌شود. از آن‌جا که حالت‌های بالاتر سهم کمتری در تابع پارش دارند، می‌توانیم با وزن حالت پایه تقریب بزنیم، $g_{0,0} = 2$ ، برای هیدروژن یونیزه $u_1 = 1$ است.

چند مثال عددی بیان می‌کنیم. در نورکره‌ی^۹ خورشید، فشار گاز $P_{\text{gas}} = 1.01 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ ، $T = 5779 \text{ K}$ است، بدست می‌آوریم $x = 5 \cdot 10^{-5}$ ، در حالی‌که در لایه‌های عمیق‌تر با $P_{\text{gas}} = 3.35 \cdot 10^{11}$ ، $T = 7.17 \cdot 10^6 \text{ K}$ ، هیدروژن تقریباً بطور کامل یونیزه شده است $x = 0.985$.

چون در معادله‌ی (۱۳۲.۱)، K_H با T افزایش و با فشار P_{gas} کاهش می‌یابد، و چون سمت چپ معادله با x افزایش می‌یابد، می‌توان دید که درجه یونیزاسیون با T افزایش و با فشار گاز کاهش می‌یابد. این پدیده را می‌توان به این صورت درک کرد که: با افزایش T ، برخوردهای بین ذرات شدیدتر شده، فوتون‌ها پر انرژی‌تر می‌شوند، و فرایند کندن الکترون‌ها از اتم‌ها زیادتر اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر، اگر T ثابت نگه داشته شود اما فشار افزایش یابد، احتمال رویارویی یون با الکترون و بازترکیب بیشتر می‌شود.

۲.۱۱.۱ تابع توزیع ماکسول-بولتزمن

تابع توزیع ماکسول-بولتزمن (برای مطالعه‌ی دقیق‌تر به مرجع [؟] مراجعه نمایید) در یک گاز کامل اتمی یا مولکولی که در حالت تعادل ترمودینامیکی است، توزیع سرعت ذرات را که بطور آزادانه در گاز حرکت می‌کنند را بدست می‌دهد. در غیاب نیروی خارجی شکل تابع توزیع سرعت ماکسول-بولتزمن به شکل زیر است

⁹Photosphere

$$f_0(p) = \frac{n}{(2mk_B T)^{3/2}} e^{-p^2/2mk_B T} \quad (133.1)$$

این تابع توزیع، احتمال یافتن یک ذره با تکانه‌ی p را در گازی با شرایط تعادل ترمودینامیکی را می‌دهد.

برای ذرات یک گاز محتمل‌ترین سرعت^{۱۰} v_{mp} را طوری تعریف می‌نماییم که مقدار $4p^2 f(p)$ بیشینه شود. محتمل‌ترین سرعت با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (134.1)$$

شکل ۱.۱: تابع توزیع ماکسول-بولتزمان [۹]

ریشه میانگین مجذور سرعت^{۱۱} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{\int d^3p v^2 f(p)}{\int d^3p f(p)}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (135.1)$$

در دمای اتاق ریشه میانگین مجذور سرعت برای گاز مولکولی اکسیژن O_2 از مرتبه‌ی $10^3 m/s$ است. چگالی تعداد ذرات را از روی تابع توزیع می‌توان محاسبه نمود

$$n = \int d^3p f(p) \quad (136.1)$$

همین‌طور انرژی متوسط ذرات را نیز می‌توان حساب کرد

$$\frac{\int d^3p (p^2/2m) f(p)}{\int d^3p f(p)} \quad (137.1)$$

¹⁰Most Probable Speed

¹¹Root Mean Square speed

۱۲.۱ تابش و مفاهیم مرتبط

همگان می‌دانیم که تقریباً تنها ابزارِ رصد و مطالعه‌ی اجرام آسمانی از طریق اندازه‌گیری و بررسی نور و تابش‌های مختلف دریافتی از اجرام آسمانی است. تابش‌های دریافتی از اجرام آسمانی (به غیر از تابش امواج گرانشی و نوترینوهای کیهانی) در باندهای مختلف طیف الکترومغناطیسی جای می‌گیرند. بنابراین، شناخت ماهیت و ویژگی‌های تابش در اخترفیزیک اهمیت بسیار بالایی دارد. در این بخش، قصد داریم با تابش و مفاهیم مرتبط آشنا شویم.

۱.۱۲.۱ نظریه‌ی موج الکترومغناطیس ماکسول

ماهیت امواج الکترومغناطیسی که نور مرئی تنها بخشی از این امواج است، تا اوایل دهه‌ی ۱۸۶۰ میلادی (۱۲۴۰ شمسی)، ریاضی- فیزیکدان اسکاتلندی، جیمز کلرک ماکسول^{۱۲} موفق شد تمام معادلات مربوط به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به صورت یکپارچه در قالب چهار معادله بیان نماید که امروز به عنوان معادلات ماکسول شناخته می‌شوند. شکل دیفرانسیلی معادلات ماکسول به این صورت هستند:

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \vec{r} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{r} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{r} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (۱۳۸.۱)$$

ماکسول دریافت که معادلاتش می‌توانند طوری حل شوند که معادله موج را برای بردارهای میدان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ تولید کنند. این معادلات وجود امواج الکترومغناطیس را که با سرعت $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$ حرکت می‌کنند پیش‌بینی کردند.

۲.۱۲.۱ طیف الکترومغناطیس

بردار پوینتینگ و فشار تابشی

همانند دیگر امواج، امواج الکترومغناطیسی نیز هم انرژی و هم تکانه را در راستای انتشار با خود حمل می‌کنند. نرخ انرژی که موج الکترومغناطیس حمل می‌کند با بردار پوینتینگ^{۱۳} بیان می‌شود

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (۱۳۹.۱)$$

ابعاد فیزیکی بردار $\vec{S}$ هست W m^{-2} . جهت بردار پوینتینگ در راستای انتشار موج الکترومغناطیس است، و اندازه‌ی آن برابر با مقدار انرژی در واحد زمان است که از سطح عمود بر راستای انتشار موج عبور می‌کند. چون اندازه‌ی بردارهای میدان‌های الکتریکی $\vec{E}$ و مغناطیسی $\vec{B}$ بطور نوسانی با زمان تغییر می‌کنند، کمیت مورد

¹²James Clerk Maxwell (1831-1879)

¹³John Henry Poynting (1852-1914)

استفاده بطور معمول متوسط زمانی بردار پوینتینگ است که روی یک دوره تناوب از موج الکترومغناطیس متوسط‌گیری شده است. در خلاء اندازه‌ی متوسط زمانی بردار پوینتینگ هست

$$h\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} E_0 B_0 \quad (14.0.1)$$

که E_0 و B_0 اندازه‌ی دامنه‌ی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هستند.

فشار تابشی

۳.۱۲.۱ تابش جسم سیاه و تابع توزیع پلانک

کدریت عمق نوری تاریکی لبه میانگین روزلند

۴.۱۲.۱ شدت ویژه و تکانه

شار محکی برای سنجش انرژی منتقل شده توسط تمام پرتوهایی است که از یک سطح عبور می‌کند. توصیف دقیق‌تر را می‌توان انرژی حمل شده توسط پرتوهای منفرد دانست. اما نکته‌ی اول اینجاست که یک پرتو منفرد هیچ انرژی را حمل نمی‌کند، بنابراین نیاز به در نظر گرفتن انرژی حمل شده توسط دسته‌ای از پرتوها داریم. تعریف مناسب به این صورت است: یک عنصر سطح dA عمود بر راستای انتشار پرتوها را فرض کنید که تمام پرتوها از سطح dA تحت زاویه‌ی فضایی d عبور می‌کنند. انرژی عبوری از سطح dA در زمان dt در بازه‌ی بسامدی d با این رابطه تعریف می‌شود

$$dE = I dA dt d \quad (14.1.1)$$

که I شدت ویژه یا روشنایی^{۱۴} است. ابعاد فیزیکی شدت ویژه هست:

$$I (;) = \text{energy}(\text{time})^{-1} (\text{area})^{-1} (\text{angle solid})^{-1} (\text{frequency})^{-1} = \text{Js}^{-1} \text{m}^{-2} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}$$

شکل ۲.۱: هندسه پرتو فرودی عمود [؟]

شار خالص

¹⁴Brightness

حال فرض کنید یک میدان تابشی (پرتوها در همه جهات) داریم و یک عنصر سطح کوچک dA در راستای دلخواه n داریم. مقدار دیفرانسیلی شار عبوری تحت زاویه‌ی فضایی d هست

$$dF = I \cos d \quad (۱۴۲.۱)$$

شار خالص در راستای n ، یعنی $F(n)$ با انتگرال‌گیری dF روی تمام زوایای فضایی بدست می‌آید:

$$F = \int I \cos d \quad (۱۴۳.۱)$$

اگر I یک میدان تابشی همسان‌گرد باشد (وابسته به زاویه نباشد)، شار خالص صفر خواهد بود، چرا که $\cos d = 0$ است. هر مقدار انرژی که از سطح dA در راستای n عبور می‌کند، همان مقدار در راستای n عبور می‌کند.

شکل ۳.۱: هندسه پرتو فرودی در جهت دلخواه [۹]

برای محاسبه شار تکانه عمود بر سطح dA (تکانه در واحد زمان در واحد سطح برابر با فشار است)، از نسبیت به یاد داریم که تکانه‌ی فوتون $E=c$ است. بنابراین شار تکانه در راستای پرتو در زاویه‌ی می‌شود $dF = c$. برای محاسبه‌ی مولفه شار تکانه عمود بر سطح dA ، یک ضریب $\cos$ دیگر را ضرب می‌نماییم و با انتگرال‌گیری داریم

$$p = \frac{1}{c} \int I \cos^2 d \quad (۱۴۴.۱)$$

توجه نمایید که F و p ممان‌های شدت I هستند (حاصل ضرب توان‌هایی از $\cos$ و انتگرال‌گیری روی d). همواره می‌توانیم روی تمام بسامدها انتگرال بگیریم تا شار کل را بدست آوریم.

$$F = \int F d \quad (۱۴۵.۱)$$

$$p = \int p d \quad (۱۴۶.۱)$$

$$I = \int_0^Z I d \quad (۱۴۷.۱)$$

شکل ۴.۱: انرژی الکترومغناطیس در یک استوانه [؟]

چگالی انرژی تابشی

چگالی انرژی ویژه u به صورت انرژی در واحد حجم در واحد بازه بسامد تعریف می‌شود. برای محاسبه بهتر است چگالی انرژی در واحد زاویه‌ی فضایی $u(\)$ را اینگونه $dE = u(\) dV d d$ در نظر گیریم که dV عنصر حجم است. یک استوانه حول محور پرتور نور به طول ct فرض کنید. چون حجم استوانه $dAcdt$ است، پس

$$dE = u(\) dAcdtd d \quad (۱۴۸.۱)$$

پرتو نوری با سرعت c حرکت می‌کنند، در زمان dt تمام تابش از استوانه خارج می‌شود:

$$dE = I dAd dtd \quad (۱۴۹.۱)$$

از برابر قرار دادن دو عبارت بالا نتیجه می‌شود

$$u(\) = \frac{I}{c} \quad (۱۵۰.۱)$$

با انتگرال‌گیری روی تمام زوایا خواهیم داشت

$$u = \int_0^Z u(\) d = \frac{1}{c} \int_0^Z I d \quad (۱۵۱.۱)$$

و یا

$$u = \frac{4}{c} J \quad (۱۵۲.۱)$$

که شدت متوسط J را تعریف می‌کنیم:

$$J = \frac{1}{4} \int_0^Z I d \quad (۱۵۳.۱)$$

چگالی انرژی کل با انتگرال‌گیری روی تمام بازه‌های بسامدی بدست می‌آید

$$u = \frac{Z}{u d} = \frac{4}{c} \frac{Z}{J d} \quad (154.1)$$

فشار تابشی گاز فوتونی با میدان تابشی همسانگرد

یک محفظه کاملاً انعکاسی شامل یک میدان تابشی همسانگرد را فرض نمایید. هر فوتون ۲ برابر مولفه‌ی تکانه‌ی عمود بر سطح خود را به دیواره‌ی انعکاس دهنده منتقل می‌نماید. بنابراین، رابطه‌ی تکانه هست

$$p = \frac{2}{c} \frac{Z}{I \cos^2 \theta} \quad (155.1)$$

از همسان‌گردی داریم، $I = J$ بنابراین

$$p = \frac{2}{c} \frac{Z}{J d \cos^2 \theta} \quad (156.1)$$

از انتگرال‌گیری روی زاویه فضایی داریم

$$p = \frac{1}{3} u \quad (157.1)$$

فشار تابشی یک میدان تابشی همسانگرد یک-سوم چگالی انرژی است. این نتیجه بعدتر در ترمودینامیک تابش جسم سیاه مفید خواهد بود.

ثابت بودن شدت ویژه در امتداد پرتوها در فضای آزاد

یک پرتو دلخواه L و دو نقطه روی آن در نظر گیرید. سطوح جزیی dA_1 و dA_2 در این نقاط عمود بر راستای پرتو می‌سازیم. از پایداری انرژی استفاده می‌نماییم. انرژی منتقل شده توسط دسته‌ای از پرتوها که از هر دو سطح dA_1 و dA_2 عبور می‌کند را حساب می‌کنیم. به دو روش می‌توان این را بیان کرد:

$$dE_1 = I_1 dA_1 dt \quad dE_2 = I_2 dA_2 dt$$

در این جا d_1 زاویه‌ی فضایی تحت پوشش dA_1 در dA_2 است. چون $d_1 = d_2 = R^2$ و $dA_1 = R^2$ است، خواهیم داشت

$$I_1 = I_2 \quad (158.1)$$

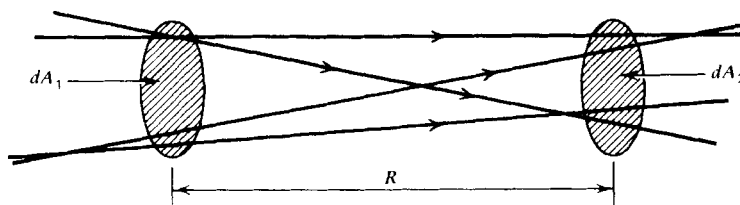
بنابراین شدت در امتداد یک پرتو ثابت می‌ماند

$$I = \text{ثابت} \quad (159.1)$$

روش دیگر برای بیان این نتیجه رابطه مشتقی است

$$\frac{dl}{ds} = 0 \quad (۱۶۰.۱)$$

که ds عنصر طول دیفرانسیلی در امتداد پرتو است.



شکل ۵.۱: شدت در امتداد پرتو ثابت می‌ماند [۹]

۱۳.۱ انتقال تابشی

وقتی یک پرتو نوری از ماده عبور می‌کند، ممکن است انرژی به آن اضافه یا از آن کاسته شود، و شدت ویژه بطور کلی ثابت باقی نمی‌ماند. پراکندگی فوتون‌ها به درون پرتو یا بیرون از پرتو می‌تواند شدت پرتو را تغییر دهد.

۱.۱۳.۱ فرآیند نشر

ضریب تابش خودبخودی j به صورت انرژی تابش شده در واحد زمان در واحد زاویه‌ی فضایی و همچنین در واحد حجم تعریف می‌شود:

$$dE = j dV d\Omega dt$$

ضریب انتشار تک‌فام به صورت مشابه این‌گونه تعریف می‌شود

$$dE = j dV d\Omega d\nu dt \quad (۱۶۱.۱)$$

که واحد فیزیکی j هست $\text{J cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$.

بطور کلی، ضریب تابش وابسته به جهت انتشار است. برای یک تابشگر همسان‌گرد، یا برای یک توزیع از تابشگرهای با جهتگیری تصادفی، می‌توانیم بنویسیم

$$j = \frac{1}{4} P \quad (۱۶۲.۱)$$

P توان تابش شده در واحد حجم در واحد بسامد است. گاهی تابش خودبخودی به صورت تابندگی^{۱۵} تعریف می‌شود، که به صورت انرژی تابش شده‌ی خودبخودی در واحد بسامد در واحد زمان در واحد جرم است که واحد آن می‌شود $\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$. اگر تابش همسانگرد باشد، پس

¹⁵Emiissivity

$$dE = dV \frac{d}{4} \quad (۱۶۳.۱)$$

که چگالی جرمی ماده تابش کننده و ضریب آخر رابطیهی بالا کسری از انرژی است که درون زاویه‌ی فضایی d تابش می‌شود. با مقایسه‌ی دو رابطیهی بالا برای dE ، رابطیهی بین j و z بدست می‌آید:

$$j = \frac{z}{4} \quad (۱۶۴.۱)$$

این رابطه برای تابش همسانگرد برقرار است. بعد از طی فاصله‌ی ds ، یک پرتو با سطح مقطع dA از میان حجم $dV = dA ds$ عبور می‌کند. بنابراین شدت اضافه شده به پرتو با تابش خود به خودی می‌شود:

$$dl = j ds \quad (۱۶۵.۱)$$

۲.۱۳.۱ جذب تابش

ضریب جذب (m^{-1}) را با معادله‌ی زیر تعریف می‌کنیم که نشان‌دهنده‌ی از دست رفتن شدت در یک پرتو است وقتی فاصله‌ی ds را طی می‌کند (طبق قرارداد برای انرژی گرفته شده از پرتو مثبت است):

$$dl = -I ds \quad (۱۶۶.۱)$$

این قانون پدیده شناختی بر حساب مدل میکروسکوپی به این صورت می‌تواند توصیف شود که ذرات با چگالی n هر کدام یک سطح مقطع موثر جذب به اندازه‌ی (m^2) دارند. این ذرات جذب کننده به صورت تصادفی توزیع شده‌اند. اگر اثر این جاذب‌ها بر روی تابش از سطح مقطع dA و زاویه‌ی فضایی d در نظر گیریم، عنصر جزء تعداد جاذب‌ها برابر با $ndA ds$ می‌شود. مساحت جذب کننده‌ی کل که توسط جاذب‌ها پوشانده می‌شود هست $dA ds n$. انرژی جذب شده‌ی پرتو مس شود

$$dl dA ds = -I (n dA ds) d ds$$

بنابراین

$$dl = -n I ds \quad (۱۶۷.۱)$$

که دقیق برابر با رابطیه‌ی پدیده شناختی ۱۶۶.۱ است که

$$= n \quad (۱۶۸.۱)$$

اغلب می‌توان را به این صورت نوشت

$$= \quad (۱۶۹.۱)$$

که چگالی جرمی و ($m^2 kg^{-1}$) ضریب جذب جرمی نامیده می‌شود و کمیت در متون ضریب کدریت^{۱۶} خوانده می‌شود.

¹⁶Opacity

این تصویر میکروسکوپی با قید برخی شرطها معتبر است: مقیاس خطی سطح مقطع برخورد باید در مقایسه با طول پویش آزاد ذرات d کوچک باشد. بنابراین $d \approx n^{-1/3}$ است، که $d \approx 1$ و شرط دیگر این که جاذبها مستقل از هم و تصادفی توزیع شده باشند. خوشبختانه این شرایط در اغلب حالت‌های اخت‌فیزیکی برقرار هستند.

۱۴.۱ معادله‌ی انتقال تابشی

حال می‌توانیم اثرات نشر و جذب را در یک معادله‌ی که تغییرات شدت ویژه را در امتداد یک پرتو می‌دهد وارد کنیم. از روابط بالا برای نشر و جذب، عبارت ترکیبی زیر را بدست می‌آوریم

$$\frac{dl}{ds} = I + j \quad (170.1)$$

معادله‌ی انتقال تابش یک چارچوب مناسب برای محاسبه‌ی شدت در یک محیط جاذب یا تابش کننده فراهم می‌کند. این معادله اغلب جنبه‌های ماکروسکوپی تابش را در یک معادله بیان می‌کند، و آن‌ها در قالب دو ضریب j و I مرتبط می‌کند. با دانستن j و تقریباً حل معادله‌ی انتقال تابش برای شدت ویژه ساده است. اگر پراکندگی داشته باشیم، حل معادله انتقال تابش دشوارتر است، چرا که تابش درون زاویه‌ی d وابسته به شدت پرتو I در زاویه‌های $d = 0$ است. معمولاً برای این حالت‌ها معادله به صورت ساده حل نمی‌شود و نیازمند روش‌های عددی است. در ادامه دو مثال از حل‌های ساده این معادله ارائه می‌دهیم:

۱- کاملاً تابش : $I = 0$. در این حالت، داریم

$$\frac{dl}{ds} = j$$

که حل آن به این صورت خواهد بود

$$I(s) = I(s_0) + \int_{s_0}^{s} j(s') ds' \quad (171.1)$$

افزایش روشنایی برابر با ضریب تابشی است که در امتداد خط دید انتگرال گرفته شده است.

۲- جذب کامل : $j = 0$. در حالت نیز داریم

$$\frac{dl}{ds} = -I$$

که جواب این معادله به این صورت است

$$I(s) = I(s_0) \exp \left(- \int_{s_0}^s ds' \right) \quad (172.1)$$

روشنایی در امتداد پرتو به صورت تابع نمایی از ضریب جذب انتگرال گرفته شده روی خط دید کاهش می‌یابد.

۱۵.۱ عمق نوری و تابع چشمه

اگر به جای کمیت S متغیر دیگری به نام عمق نوری استفاده نماییم، تابع انتقال به شکل ساده ویژه‌ای در می‌آید. کمیت عمق نوری^{۱۷} را به این صورت تعریف می‌نماییم

$$d = ds$$

و یا

$$(s) = \int_{s_0}^Z s^0 ds^0 \quad (173.1)$$

عمق نوری در امتداد مسیر انتشار پرتو اندازه گرفته می‌شود؛ گاهی، در امتداد پرتو به سمت عقب اندازه گرفته می‌شود و یک علامت منفی در معادله‌ی ۱۷۳.۱ ظاهر می‌شود. یک محیط را از نظر اپتیکی ضخیم^{۱۸} یا کدر^{۱۹} می‌گوییم اگر از ، در امتداد یک مسیر در محیط انتشار انتگرال بگیریم، شرط $1 >$ را اضاء نماید. وقتی $1 <$ باشد، محیط از نظر اپتیکی نازک یا شفاف است. محیطی که از نظر اپتیکی نازک است، فوتونی با بسامد می‌تواند بدون جذب شدن از میان محیط عبور نماید، در حالی که در یک محیط کدر، فوتون با بسامد نمی‌تواند بطور کامل از محیط بدون جذب شدن خارج شود.

معادله انتقال بعد از تقسیم کردن دو طرف بر به این شکل نیز می‌تواند نوشته شود

$$\frac{dl}{d} = I + S \quad (174.1)$$

که تابع چشمه^{۲۰} S به صورت نسبت ضریب تابش به ضریب جذب تعریف می‌شود:

$$S = \frac{j}{s} \quad (175.1)$$

حال می‌خواهیم به طور معمول معادله‌ی انتقال تابش را با در نظر گرفتن همه‌ی کمیت‌ها به صورت توابعی از عمق نوری به جای s حل نماییم. با ضرب کردن معادله انتقال در ضریب انتگرال‌گیری e و تعریف کمیت‌های I_e و S_e شروع می‌نماییم. سپس معادله به این شکل در می‌آید

$$\frac{dl}{d} = S$$

که حل آن می‌شود

$$I(l) = I(0) + \int_0^Z S(l^0) dl^0$$

اگر جواب را بر حسب I و S بازنویسی نماییم، حل معمول معادله انتقال تابش را بدست می‌آوریم:

¹⁷Optical depth

¹⁸Optically thick

¹⁹Opaque

²⁰Source function

$$I(\lambda) = I(0)e^{-\tau} + \int_0^{\tau} e^{-\tau'} S(\lambda) d\tau' \quad (176.1)$$

از آن جا که یک توان بدون بعد برای جذب است، معادله‌ی قبل به صورت جمع دو جمله می‌تواند تفسیر شود: شدت اولیه که توسط جذب تقلیل یافته و جمله‌ی چشمه که توسط جذب کاهش یافته است. به عنوان مثالی از این رابطه، یک تابع چشمه‌ی ثابت S را در نظر بگیرید. معادله‌ی ۱۷۶.۱ برای چنین حالتی جواب زیر را می‌دهد

$$I(\lambda) = I(0)e^{-\tau} + S(1 - e^{-\tau}) = S + e^{-\tau}(I(0) - S) \quad (177.1)$$

در معادله‌ی ۱۷۷.۱، در حد $\tau \rightarrow 1$ نتیجه می‌دهد $S \rightarrow I$. اگر پراکندگی داشته باشیم، S شامل سهمی از I نیز می‌شود. در این جا می‌توانیم اشاره‌ای به تفسیر فیزیکی از تابع چشمه و تابع انتقال داشته باشیم. از معادله‌ی انتقال (معادله‌ی ۱۷۴.۱) می‌توانیم ببینیم که اگر $I > S$ باشد $dI/d\lambda < 0$ و I در امتداد پرتو کاهش می‌یابد. اگر $I < S$ ، شدت I در امتداد پرتو افزایش می‌یابد. بنابراین تابع چشمه کمیتی است که شدت ویژه تمایل به نزدیک شدن به آن دارد، و اگر به اندازه کافی عمق نوری داشته باشیم به آن می‌رسد. با توجه به این توضیح، معادله‌ی انتقال یک فرآیند "واهلش"^{۲۱} را توصیف می‌نماید.

۱۶.۱ پویش آزاد متوسط

مفهوم مهمی که فرآیند جذب را در مسیرهای یکسان توصیف می‌نماید، پویش آزاد متوسط فوتون‌ها می‌باشد. این کمیت به صورت فاصله متوسطی که یک فوتون می‌تواند درون محیط جاذب طی کند بدون این که جذب شود، تعریف می‌شود. پویش آزاد متوسط را می‌توان به سادگی به ضریب جذب یک ماده‌ی همگن مرتبط کرد. از قانون نمایی جذب ۱۷۲.۱، احتمال اینکه یک فوتون حداقل یک عمق نوری را طی نماید به صورت ساده می‌شود e . بنابراین عمق نوری متوسط طی شده توسط فوتون برابر با یک است:

$$\int_0^{\infty} h(\lambda) d\lambda = 1$$

فاصله فیزیکی متوسط طی شده در یک محیط همگن به صورت طول پویش آزاد متوسط l تعریف می‌شود و با $h(\lambda) = 1$ یا به شکل زیر تعیین می‌شود

$$l = \frac{1}{n} \quad (178.1)$$

طول پویش آزاد متوسط l با معکوس ضریب جذب ماده همگن رابطه دارد.

²¹Relaxation

۱۷.۱ نیروی تابشی

ماده‌ای که تابش را جذب می‌کند از طرف تابش نیرویی به آن اعمال می‌شود، چرا که تابش حامل تکانه‌ی فوتون‌هاست. می‌توانیم بردار شار تابش را تعریف نماییم

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{S} d\mathbf{A} \quad (179.1)$$

در این جا n بردار واحد در راستای مسیر پرتو است. تکانه فوتون نیز $E=c$ است، بنابراین تکانه‌ی برداری در واحد سطح در واحد زمان در واحد طول پویش که توسط ماده جذب می‌شود برابر است با

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \int \mathbf{S} d\mathbf{A} \quad (180.1)$$

چون $dV = dAdz$ است، کمیت $\mathbf{f}$ نیروی تابش در واحد حجم است که میدان تابش اعمال می‌نماید. دقت داریم که نیرو در واحد جرم ماده با رابطه‌ی $f = \mathbf{f} \cdot \mathbf{z}$ و یا رابطه زیر داده می‌شود

$$f = \frac{1}{c} \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{z} d\mathbf{A} \quad (181.1)$$

در معادلات ۱۸۰.۱ و ۱۸۱.۱ فرض بر همسان‌گردی ضریب جذب ماده است.

۱۸.۱ پخش تابشی

اگر عمق اپتیکی موثر در یک محیط همگن به اندازه‌ی کافی زیاد باشد، تابع چشمه S به تابع پلانک B نزدیک می‌شود. محیط‌های واقعی به ندرت همگن هستند، اما اغلب در نواحی درونی ستاره‌ها، مرتبه‌ی بالایی از همگنی موضعی وجود دارد. در چنین حالت‌هایی می‌توان یک عبارت ساده برای شار انرژی بدست آورد، که به گرادیان دمای موضعی مرتبط است. این نتیجه، اولین بار توسط روزلند^{۲۲} بدست آمد، تقریب روزلند نامیده می‌شود.

در انتقال انرژی توسط تابش در ستاره‌ها، طول پویش آزاد فوتون‌ها در مقایسه با طول مشخصه ستاره R (شعاع ستاره) که انتقال انرژی در این فاصله اتفاق می‌افتد، بسیار کوچک است؛ $10^{11} \text{ cm} \approx R_{ph}$ در این حالت، انتقال انرژی را می‌توان به عنوان یک فرآیند پخش^{۲۳} در نظر گرفت، که فرمالیزم را بسیار ساده‌تر خواهد کرد. در ادامه معادله متناظر برای فوتون‌ها را با مقایسه حالت مشابه در پخش ذرات مادی بدست خواهیم آورد.

شار پخشی j برای ذرات (در واحد سطح در واحد زمان) که بین مکان‌هایی با چگالی ذرات مختلف n شارش می‌یابد با رابطه زیر داده می‌شود

$$j = -D \nabla n \quad (182.1)$$

²²Svein Rosseland (1894-1985)

²³Diffusion process

در این رابطه D ضریب پخش است

$$D = \frac{1}{3} v l_p \quad (183.1)$$

که از روی مقادیر میانگین سرعت متوسط v و طول پویش آزاد متوسط l_p برای ذرات تعیین می‌شود. برای بدست آوردن شار پخشی متناظر برای فوتون‌های حامل انرژی تابشی F ، چگالی ذرات n را با چگالی انرژی تابش u جایگزین می‌نماییم

$$u = aT^4 \quad (184.1)$$

و v سرعت ذرات را با سرعت نور c و l_p را با $l_{ph} = \frac{1}{n\sigma}$ جایگزین می‌نماییم. در رابطه‌ی ۱۸۴.۱ ضریب $a = 7.57 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$ ثابت چگالی تابش نام دارد. با توجه به تقارن کروی مسأله، شار F تنها یک مؤلفه‌ی شعاعی $F_r = j F_j = F$ دارد و u به مشتق در راستای شعاع تقلیل می‌یابد

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 4aT^3 \frac{\partial T}{\partial r} \quad (185.1)$$

بنابراین معادلات ۱۸۲.۱ و ۱۸۳.۱ نتیجه می‌دهند

$$F = \frac{4acT^3}{3} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (186.1)$$

توجه داریم که این معادله می‌تواند به عنوان یک معادله معمول برای رسانش گرمایی به این صورت بازنویسی شود

$$F = k_{\text{rad}} r T \quad (187.1)$$

که در این جا

$$k_{\text{rad}} = \frac{4acT^3}{3} \quad (188.1)$$

که ضریب رسانش برای انتقال تابشی می‌باشد. با حل معادله‌ی ۱۸۶.۱ برای دما و جای‌گذاری F از درخشندگی موضعی معمول $I = 4r^2 F$ ؛ خواهیم داشت

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{3}{16ac} \frac{I}{r^2 T^3} \quad (189.1)$$

با تبدیل کردن معادله توسط متغیر مستقل جرم m (شبه کاری که در تعادل هیدروستاتیک انجام می‌دهیم)، معادله اساسی برای انتقال تابشی انرژی به این صورت بدست می‌آید

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \frac{3}{64ac} \frac{I}{r^4 T^3} \quad (190.1)$$

البته، این معادله‌ی تمیز و ساده با نزدیک شدن به سطح ستاره نامعتبر خواهد شد. با نزدیک شدن به سطح ستاره و کاهش دما، طول پویش آزاد فوتون‌ها از مرتبه فواصل سطح ستاره خواهد شد (و در نهایت بزرگ‌تر از آن خواهد شد)؛ و بنابراین کل تقریب پخش شکست خواهد خورد و ناچار خواهیم شد مجموعه معادلات کامل و پیچیده انتقال تابش را در جو ستاره حل نماییم (این معادلات در حد عمق اپتیکی به اندازه‌ی کافی بزرگ به تقریب پخشی ما خواهند رسید).

۱.۱۸.۱ میانگین روزلند برای

معادلات بخش قبل که به دست آوردیم مستقل از بسامد هستند و کمیت‌های F و l روی تمام بسامدها انتگرال گرفته شده‌اند، بنابراین کمیت یک متوسط ویژه روی بسامد را نشان می‌دهد. حال باید یک روش برای این متوسط‌گیری شرح نماییم.

در حالت کلی ضریب جذب وابسته به بسامد است. برای شار انرژی پخشی F برای تابش در بازه $[d; +]$ ،

$$F = D r u \quad (۱۹۱.۱)$$

$$D = \frac{1}{3} c l = \frac{c}{3} \quad (۱۹۲.۱)$$

چگالی انرژی در همان بازه با تابع پلانک داده می‌شود

$$u = \frac{4}{c} B(; T) = \frac{8 h}{c^3} \frac{1}{e^{h = k_B T} - 1} \quad (۱۹۳.۱)$$

که $B(; T)$ تابع پلانک برای شدت تابش جسم سیاه هست. برای سادگی، از این جا به بعد پایین‌نویس را برای دما T در روابط نخواهیم گذاشت. از معادله‌ی ۱۹۳.۱ داریم

$$r u = \frac{4}{c} \frac{\partial B}{\partial T} T \quad (۱۹۴.۱)$$

که همراه با معادله‌ی ۱۹۱.۱ و ۱۹۲.۱ و انتگرال‌گیری روی تمام بسامدها، شار کل خواهد شد

$$F = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{\partial T} \frac{\partial B}{\partial T} r T \quad (۱۹۵.۱)$$

که مجدداً معادله‌ی ۱۸۶.۱ بدست می‌آید، با این تفاوت که ضریب رسانش هست

$$k_{\text{rad}} = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{\partial T} \frac{\partial B}{\partial T} d \quad (۱۹۶.۱)$$

با برابر قرار دادن این عبارت برای k_{rad} با شکل متوسط‌گیری شده‌ی ۱۸۸.۱، رابطه مناسب برای متوسط ضریب جذب بدست می‌آید:

$$\frac{1}{a} = \frac{Z_1}{acT^3} \frac{1}{\frac{\partial B}{\partial T}} \quad (197.1)$$

که این میانگین روزلند^{۲۴} نام دارد. دقت نمایید که از تابع پلانک داریم

$$\frac{Z_1}{\frac{\partial B}{\partial T}} = \frac{acT^3}{a} \quad (198.1)$$

و می‌توان میانگین روزلند را به این شکل نیز نوشت

$$\frac{1}{a} = \frac{R_1 \frac{1}{\frac{\partial B(T)}{\partial T}} d}{R_1 \frac{\partial B(T)}{\partial T} d} \quad (199.1)$$

متوسط روزلند میانگین هارمونیک از عمق اپتیکی با ضریب $\frac{\partial B}{\partial T}$ است.

۲.۱۸.۱ پخش گرمایی توسط حرکات تصادفی

طبق قانون پخش فیک^{۲۵} وقتی یک گرادیان چگالی ذرات از نوع مشخص r داشته باشیم، شار پخشی J (شار خالص ذرات در واحد سطح در واحد زمان) با رابطه زیر داده می‌شود:

$$J = -D \frac{dn}{dz}; \quad D = \frac{1}{3} v \lambda \quad (200.1)$$

که D را ضریب پخش می‌نامیم و به سرعت متوسط و طول پویش آزاد وابسته است. ایده این رابطه را می‌توان این‌گونه توضیح داد.

یک سطح با مساحت واحد و ذرات گذرنده از این سطح در هر دو جهت را در نظر بگیرید. محور z را مختصه عمود بر سطح فرض کنید. چگالی تعداد ذرات گذرنده در راستای مثبت z در واحد سطح در واحد زمان برابر است با:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{6} n v \quad (201.1)$$

ضریب $\frac{1}{6}$ از این‌جا ناشی می‌شود که نصف ذرات در یک راستا می‌گذرند، و چون حرکاتشان همسان‌گرد است سرعت متوسط عمود بر سطح می‌شود $\frac{1}{3} v$. اگر گرادیان چگالی ذرات در راستای z داشته باشیم $\frac{\partial n}{\partial z}$ ، پس چگالی تعداد ذراتی که بالاتر با طول پویش آزاد حرکت می‌کنند هست $n(z)$ و ذراتی که به سمت پایین حرکت می‌کنند چگالی تعداد $n(z + \lambda)$ دارند. بنابراین شار خالص ذرات گذرنده از سطح هست:

$$J = \frac{1}{6} v n(z) - \frac{1}{6} v n(z + \lambda) = -\frac{1}{6} v \lambda \frac{\partial n}{\partial z} \quad (202.1)$$

معادله ۲۰۰.۱ در واقع تعمیمی از این معادله در سه بعد است.

حال، علاوه بر گرادیان چگالی تعداد ذرات، گرادیان در چگالی انرژی ذرات حامل u داریم. با مقایسه می‌توانیم

²⁴Svein Rosseland (1894-1985)

²⁵Fick's law

در نظر گیریم که یک شار خالص انرژی گذرنده از سطح وجود دارد و چون ذراتی که بالا حرکت می‌کنند انرژی بیشتری از ذرات پایین دارند، بنابراین گرادیان چگالی انرژی داریم که منجر به شار انرژی خالص می‌شود:

$$F = -Dr u \quad (203.1)$$

چون گرادیان چگالی انرژی با گرادیان دما به این صورت مرتبط است: $r u = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dr}$ $T = c_v r T$ بنابراین معادله را برای رسانش گرمایی می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$F = -K r T; \quad K = \frac{1}{3} v c_v \quad (204.1)$$

که ضریب K را رسانندگی می‌نامیم. توصیف ارائه شده برای تمامی ذرات که در تعادل ترمودینامیک موضعی (LTE) اعم از فوتون‌ها یا ذرات گاز صادق است.

۳.۱۸.۱ انتقال انرژی توسط رسانش

برخورد بین ذرات گاز (یون‌ها و الکترون‌ها) می‌تواند گرما را منتقل کند. تحت شرایط عادی (گاز کامل)، رسانش برخوردی خیلی کوچک‌تر از رسانش تابشی است. سطح مقطع برخوردی در حدود 10^{-18} تا 10^{-20}cm^2 در دمای درون ستارگان است و طول پویش آزاد برای برخوردها بسیار کوتاه‌تر از طول پویش تابش λ_{ph} می‌شود. علاوه بر این، سرعت متوسط ذرات هم خیلی کوچک‌تر از فوتون‌هاست c . بنابراین به طور طبیعی می‌توانیم از رسانش گرمایی در مقایسه به پخش تابشی صرف نظر کنیم.

اما، وقتی الکترون‌ها تبهگن شوند و ستاره چگال باشد وضعیت متفاوت خواهد شد. در این حالت هم سرعت الکترون‌ها افزایش می‌یابد و از آن مهم‌تر، طول پویش میانگین الکترون‌ها به دلیل اصل طرد پائولی افزایش می‌یابد. در چگالی‌های خیلی بالا λ_{ph} رسانش الکترون‌ها بسیار مؤثرتر از انتقال انرژی توسط تابش خواهد بود. این اتفاق برای ستاره‌ها در مراحل پایانی عمر و در هسته تبهگن و کوتوله‌های سفید مهم است که یک هسته تقریباً هم دما را نتیجه می‌دهد. شار انرژی ناشی از رسانش گرمایی می‌تواند به این صورت نوشته شود:

$$F_{cd} = -K_{cd} r T \quad (205.1)$$

جمع شار تابشی و رسانشی می‌شود

$$F = F_{rad} + F_{cd} = -(K_{rad} + K_{cd}) r T \quad (206.1)$$

می‌توانیم کدریت رسانشی K_{cd} مانند کدریت تابشی تعریف کنیم

$$K_{cd} = \frac{4acT^3}{3} \quad (207.1)$$

حال می‌توانیم شار ترکیبی تابش و رسانش به شکل شبیه شار تابش بنویسیم:

$$F = -\frac{4acT^3}{3} r T; \quad \frac{1}{\text{rad}} = \frac{1}{\text{rad}} + \frac{1}{\text{cd}} \quad (208.1)$$

این نتیجه بدین معناست که فرآیند انتقال انرژی که بیشترین شار را دارد غالب خواهد شد.

۱۹.۱ درخشندگی ادینگتون

پیش تر رابطه گرادیان دما $dT=dr$ را دیدیم. چون فشار تابشی $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$ است می‌توان گرادیان فشار تابشی را نیز به این صورت نوشت:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = \frac{4}{3}aT^3 \frac{dT}{dr} = \frac{L_r}{4c r^2} \quad (209.1)$$

این گرادیان فشار تابشی یک نیروی بیرون سو تولید می‌کند که ناشی از شار فوتون‌هاست. اگر ستاره در حال تعادل باشد، باید نیروی فشار تابشی کوچک‌تر از نیروی ناشی از گرانش باشد که نیروی ناشی از گرانش در رابطه تعادل هیدروستاتیک صدق می‌کند. به عبارت دیگر:

$$j \frac{dP_{\text{rad}}}{dr} j < j \frac{dP}{dr} j_{\text{HE}} \quad \left(\frac{L_r}{4c r^2} < \frac{Gm}{r^2} \right) \quad (210.1)$$

این رابطه یک حد بیشینه برای درخشندگی موضعی می‌دهد که به درخشندگی ادینگتون مشهور است

$$L_r < \frac{4cGM_r}{r} = L_{\text{Edd}} \quad (211.1)$$

این بیشینه درخشندگی است که توسط تابش می‌تواند درون یک ستاره در حال تعادل هیدروستاتیک ایجاد شود. اگر این رابطه را برای کل ستاره بنویسیم داریم:

$$L < L_{\text{Edd}} = \frac{4cGM}{r} \quad (212.1)$$

برای ستاره‌های پر جرم که دمای مؤثرشان در حدود 50000K است دما در جو به قدری بالا است که هیدروژن در فوتوسفر یونیزه است. در این حالت سهم مؤثر در کدریت ناشی از پراکندگی الکترون‌ها است که کدریت آن با رابطه $\kappa_{\text{es}} = 0.02(1+X)$ داده می‌شود و حد ادینگتون با این تقریب می‌شود

$$L_{\text{Edd}} \approx 1.5 \cdot 10^{31} \frac{M}{M_{\odot}}; \quad \frac{L_{\text{Edd}}}{L} \approx 3:8 \cdot 10^4 \frac{M}{M_{\odot}} \quad (213.1)$$

۲۰.۱ فرآیندهای همرفتی

فرآیندهایی که در مقیاس زمانی کوتاهی رخ می‌دهد که فرصت تبادل گرما با محیط ندارد فرآیندهای بی دررو هستند. برای اینکه ویژگی‌های ساختار ستاره‌ای تحت شرایط بی دررو را بدست آوریم نیاز داریم برخی روابط ترمودینامیک را بدست آوریم.

قانون اول ترمودینامیک بیان می‌کند که مقدار گرمای جذب شده توسط سیستم Q برابر است با مجموع تغییر انرژی درونی U و کار انجام شده روی سیستم $W = P V$. قانون دوم ترمودینامیک بیان می‌کند که برای یک فرآیند برگشت پذیر، تغییر در انتروپی برابر تغییر در انرژی گرمایی تقسیم بر دما است. انتروپی یک متغیر حالت است، برعکس انرژی گرمایی. در واحد جرم ترکیب قانون اول و دوم به این صورت می‌تواند بیان شود

$$dq = T ds = du + P dv = du + \frac{P}{2} d \quad (214.1)$$

در این رابطه dq تغییر در انرژی گرمایی، du تغییر در انرژی درونی (کمیت $u = U =$ گرمای درونی ویژه در واحد جرم است)، s انتروپی ویژه (انتروپی در واحد جرم) و $v = 1 =$ حجم واحد جرم است. کمیت‌های du و ds دیفرانسیل کاملند اما dq اینطور نیست.

شکل دیفرانسیلی معادله حالت

برای محاسبه عبارت‌های کلی برای مشتق‌های ترمودینامیک از قبیل گرمای ویژه و مشتق‌های بی دررو بهتر است معادله حالت را به شکل دیفرانسیلی بنویسیم

$$\frac{dP}{P} = \tau \frac{dT}{T} + \frac{d}{\quad} \quad (215.1)$$

که ضرایب به این صورت تعریف شده‌اند

$$\tau = \frac{\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_{X_i}}{\quad} = \frac{T}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{X_i} \quad (216.1)$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln} \right)_{T; X_i}}{\quad} = \frac{P}{\quad} \left(\frac{\partial}{\partial} \right)_{T; X_i} \quad (217.1)$$

اندیس‌های X_i بدین معناست که ترکیبات شیمیایی ثابت می‌مانند. در یک معادله حالت کلی ضرایب τ و می‌توانند به T وابسته باشند اما اگر تقریباً ثابت باشند می‌توانیم معادله حالت را به شکل توانی به این صورت بنویسیم:

$$P = P_0 T^\tau \quad (218.1)$$

برای مثال برای یک گاز کامل بدون در نظر گرفتن تابش داریم $\tau = 1$ در حالی که برای یک گاز تابش-غالب داریم $\tau = 4$; $= 0$.

۱.۲۰.۱ برخی روابط ترمودینامیکی

اگر قانون اول ترمودینامیک را در واحد جرم بنویسیم

$$dq = du + P dv = du + \frac{P}{2} d \quad (219.1)$$

حجم واحد جرم $v = 1 =$ است. می‌توانیم تغییرات انرژی درونی در واحد جرم را بر حسب تغییرات در معادله حالت بنویسیم

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) dT + \left(\frac{\partial u}{\partial} \right)_{\tau} d \quad (220.1)$$

تغییر انتروپی در واحد جرم $ds = dq = T$ می‌شود

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) dT + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial} \right)_{\tau} \frac{P}{2} d \quad (221.1)$$

چون انتروپی s یک تابع حالت است یعنی $ds = \frac{1}{T} du - \frac{P}{T^2} dT$ که نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{T^2} \quad (222.1)$$

که با بازکردن مشتق در سمت راست و ساده‌سازی معادلات بدست می‌آید

$$\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P = \frac{P}{T^2} - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_P \quad (223.1)$$

با استفاده از تعریف ضریب α_P می‌توانیم بنویسیم $\alpha_P = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_P$ و بنابراین بدست می‌آید

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P = (1 - \alpha_P) \frac{P}{T} \quad (224.1)$$

تعریف ظرفیت گرمایی ویژه در حجم و فشار ثابت به این صورت است

$$c_V = \frac{dq}{dT}_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V \quad (225.1)$$

$$c_P = \frac{dq}{dT}_P = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P + \frac{P}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)_P \quad (226.1)$$

برای بدست آوردن عبارتی برای c_P از شکل دیفرانسیلی معادله حالت استفاده می‌کنیم و در فشار ثابت $dP = 0$ بدست می‌آوریم

$$\frac{dT}{dT} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T} \quad (227.1)$$

با استفاده از معادله ۲۲۰.۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{du}{dT} = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dT} \quad (228.1)$$

و بنابراین

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dT} = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_P + (1 - \alpha_P) \frac{P}{T} \quad (229.1)$$

که در این رابطه از روابط ۲۲۴.۱ و ۲۲۷.۱ استفاده کرده‌ایم. از تعریف ظرفیت گرمایی‌ها می‌توانیم رابطه زیر را نتیجه بگیریم

$$c_P - c_V = \frac{P}{T} \quad (230.1)$$

بهتر است روابطی کاربردی برای تغییر انرژی گرمایی در واحد جرم بر حسب متغیرهای حالت بدست آوریم.

قانون اول ترمودینامیک به این صورت است

$$dq = T ds = c_v dT + \frac{P}{\tau} d\tau \quad (231.1)$$

از معادله حالت داریم

$$d\tau = - \frac{dP}{P} + \tau \frac{dT}{T} \quad (232.1)$$

پس خواهیم داشت

$$dq = c_v dT + \frac{\tau}{P} \frac{dP}{P} + \tau \frac{dT}{T} = c_v + \frac{\tau}{T} \frac{P}{P} dT + \frac{\tau}{P} dP \quad (233.1)$$

جملات داخل پرانتز آخر برابر c_p هستند و بنابراین می‌توان نوشت

$$dq = T ds = c_p dT + \tau \frac{dP}{P} \quad (234.1)$$

حال با استفاده از این رابطه می‌توانیم عبارتی برای گردیان دمای بی دررو محاسبه کنیم

$$r_{ad} = \frac{d \ln T}{d \ln P} \quad (235.1)$$

تغییر بی دررو بدین معناست که مشتق را زمانی گرفته‌ایم که انتروپی ثابت باشد $dq = 0$. از معادله ۲۳۴.۱ بدست می‌آید

$$\frac{dT}{dP} \bigg|_s = \frac{1}{c_p} \tau \quad \frac{d \ln T}{d \ln P} \bigg|_s = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} \bigg|_s = \frac{P}{T c_p} \tau \quad (236.1)$$

این بدین معناست که گردیان بی دررو

$$r_{ad} = \frac{P}{T c_p} \tau \quad (237.1)$$

حال معادله ۲۳۴.۱ را به این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$dq = c_p dT + r_{ad} \frac{T}{P} dP \quad (238.1)$$

نمای بی دررو در رابطه P / r_{ad} به این صورت تعریف می‌شود

$$r_{ad} = \frac{d \ln P}{d \ln} \quad (239.1)$$

با استفاده از روابط ۲۳۱.۱ و ۲۳۴.۱ و قرار دادن $dq = 0$ بدست می‌آوریم

$$dT = \frac{P}{2c_v} \tau d\tau; \quad dT = \frac{1}{c_p} \tau dP \quad (240.1)$$

با حذف dT از دو عبارت نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{dP}{P} = \frac{C_p}{C_v} \frac{d}{d \ln P} \right) \quad \frac{d \ln P}{d \ln s} = \frac{C_p}{C_v} \quad (241.1)$$

این بدین معناست که

$$\boxed{ad = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_v}}; \quad = \frac{C_p}{C_v} \quad (242.1)$$

با قرار دادن از رابطه ۲۳۰.۱ رابطه بالا به این صورت نیز می‌تواند نوشته شود

$$ad = \frac{P}{T C_v} \frac{2}{T} \quad (243.1)$$

۲.۲۰.۱ ظرفیت گرمایی ویژه

ظرفیت گرمایی در حجم ثابت و در فشار ثابت در واحد جرم به این صورت هستند:

$$C_v = \frac{dq}{dT}_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (244.1)$$

$$C_p = \left(\frac{dq}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p + \frac{P}{T^2} \left(\frac{\partial u}{\partial P} \right)_T \quad (245.1)$$

برای گاز کامل داریم $u = U = \frac{3}{2}P = \frac{3}{2}RT$ که نتیجه می‌دهد $C_v = \frac{3}{2}R$. برای گاز تابش غالب بدست می‌آید $C_v = 4aT^3$.

۳.۲۰.۱ مشتق‌های بی دررو

پاسخ سیستم به تغییرات بی دررو، مشتقات بی دررو نامیده می‌شود. دو تا از این‌ها اهمیت ویژه برای ساختار ستاره دارند:

الف: نمای بی دررو یا ad پاسخ پارامتر فشار به انقباض یا انبساط بی دررو یا تغییر در چگالی است.

$$ad = \frac{\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln} \right)_{ad}}{\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln} \right)_{ad}} \quad (246.1)$$

زیرنویس "ad" بدین معناست که تغییر به صورت بی دررو انجام شده است، یعنی در انتروپی ثابت. اگر نمای بی دررو ad ثابت باشد پس برای تغییرات بی دررو P / ad کمیت ad با پایداری دینامیک ستاره مرتبط است.

گرادیان دمای بی دررو به صورت زیر تعریف شود

$$r_{ad} = \frac{\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_{ad}}{\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln P} \right)_{ad}} \quad (247.1)$$

در واقع این یک نمای دیگر است که رفتار دما تحت انقباض یا انبساط را توصیف می‌کند (r_{ad} ثابت باشد داریم $(T / P)^{r_{ad}}$ ، که برای پایداری در برابر همرفت مهم است.

نمای بی دررو برای یک فرآیند بی دررو $dq = 0$ است و بنابراین

$$du = \frac{P}{2} d \quad (248.1)$$

برای گازهایی کامل با ذرات آزاد، در هر دو حد نسبیتی و غیر نسبیتی انرژی درونی U متناسب با فشار P است. در این صورت برای انرژی درونی در واحد جرم می‌توان نوشت

$$u = \frac{P}{2} \quad (249.1)$$

که مقدار ثابت بین ۳ و ۱/۵ است. اگر از این معادله مشتق بگیریم و در رابطه ۲۴۸.۱ جایگذاری کنیم برای یک فرآیند بی دررو بدست می‌آوریم

$$\frac{dP}{P} = \frac{+1}{2} \frac{d}{\quad} \quad (250.1)$$

با توجه به تعریف نمای بی دررو برای گاز کامل بدست می‌آوریم

$$ad = \frac{+1}{2} \quad (251.1)$$

برای ذرات غیر نسبیتی ضریب $ad = 3=2$ و $ad = 5=3$ است. برای ذرات فوق نسبیتی (فوتون) ضریب $ad = 3=2$ و $ad = 4=3$ است. برای مخلوط گاز تابشی و گاز کامل (1) و (0) $ad = 5=3$ و $ad = 4=3$ است. برای یک معادله حالت کلی می‌توان بدست آورد

$$ad = \frac{P}{T} + \frac{P}{T C_V} \quad (252.1)$$

بنابراین نمای بی دررو با نسبت ظرفیت گرمایی‌ها به صورت $ad =$ رابطه دارد. برای گاز کامل که $ad = 1$ است این دو با هم برابر می‌شوند.

گرادیان دمای بی دررو برای یک تغییر بی دررو می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dP}{P} = \frac{d}{ad}$$

با استفاده از معادله حالت دیفرانسیلی و حذف d می‌توانیم رابطه‌ای بین گرادیان دمای بی دررو و نمای بی دررو به صورت زیر بیابیم:

$$r_{ad} = \frac{ad}{ad T} \quad (253.1)$$

برای یک گاز کامل بدون تابش ($= 1$) داریم $r_{ad} = 1$ که با توجه به $ad = 5=3$ بدست می‌آید. $r_{ad} = 0.4$ برای یک گاز تابش غالب ($= 0$) که $= 0$ نتیجه می‌شود $r_{ad} = 0.25$. $r_{ad} = 0.25$ نتیجه می‌شود $r_{ad} = 0.25$.

برای یک معادله حالت کلی می‌توان بدست آورد

$$r_{ad} = \frac{P}{T c_p} \frac{G T}{T} \quad (254.1)$$

این بدین معناست که برای یک فرآیند غیر بی دررو می‌توانیم تغییرات انرژی گرمایی را به این صورت بازنویسی نماییم:

$$dq = c_p dT + r_{ad} \frac{T}{P} dP \quad (255.1)$$

۲۱.۱ همرفت

دیدیم که پخش تابشی برای اینکه انرژی را به بیرون منتقل کند، گرادیان دمای مشخصی نیاز دارد که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3}{16 \pi c T^3} \frac{L_r}{r^2} \quad (256.1)$$

هر چه درخشندگی بیشتر باشد، گرادیان دمای مورد نیاز بیشتر است. اما یک حد بالا برای گرادیان دما داریم که نباید از حد ناپایداری ستاره فراتر برود. این ناپایداری موجب حرکت چرخه‌ای بزرگ-مقیاس گاز درون ستاره می‌شود که همرفت می‌نامیم. همرفت به عنوان نوعی از ناپایداری دینامیکی تلفی می‌شود، اگرچه نتایج مخربی ندارد. همرفت موجب نقض تعادل هیدروستاتیک به صورت سراسری نمی‌شود. همرفت ساختار ستاره را به صورتی تغییر می‌دهد که یک ساز و کار انتقال انرژی مؤثر است.

۱.۲۱.۱ شرایط لازم برای پایداری در برابر همرفت

تا اینجا یک تقارن کروی برای لایه‌های ستاره فرض کرده‌ایم، یعنی تمام متغیرها در کره‌های هم مرکز ثابت هستند. اما در واقعیت افت‌وخیزهای کوچکی ناشی از حرکت‌های گرمایی ذرات گاز وجود دارد. اگر این اختلال‌های کوچک رشد نکنند می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. اما، اگر اختلال‌ها رشد یابند می‌توانند حرکت‌های بزرگ مقیاس مانند همرفت را ایجاد کنند. بنابراین نیاز داریم که پایداری دینامیکی یک لایه درون یک ستاره را در برابر چنین اختلال‌هایی بررسی کنیم.

یک جزء جرم را در نظر بگیرید که به واسطه یک اختلال کوچک، رو به بالا به اندازه r جابجا می‌شود. در مکان اولیه (در شعاع r چگالی و فشار P_1 و P_2 هستند، و در مکان جدید پس از جابجایی $(r + r)$ چگالی و فشار محیط برابر P_2 و P_1 می‌باشد. از آن‌جا که فشار رو به بیرون کاهش می‌یابد، $P_2 < P_1$ و جزء جرم گاز منبسط خواهد شد تا تعادل فشار با محیط را حفظ کند. فشار عنصر جرم گاز در مکان ۲ برابر $P_e = P_2$ است، اما چگالی جدید پس از انبساط e لزوماً برابر با e_2 چگالی محیط نیست. اگر $e > e_2$ باشد، جزء گاز یک نیروی شناوری خالص به سمت پایین (نیروی ارشمیدسی)، را حس می‌کند که آن را به سمت مکان اولیه هدایت می‌کند. بنابراین اختلال کوچک فرو نشانده می‌شود و وضعیت پایدار است. از طرف دیگر، اگر $e < e_2$ باشد یک نیروی شناوری به سمت بالا روی عنصر جرم (حباب) وارد خواهد شد و وضعیت ناپایدار خواهد بود و منجر به همرفت می‌شود.

انبساط حباب گاز همزمان با صعود آن به اندازه r در مقیاس زمان دینامیکی محلی (با سرعت صوت) رخ می‌دهد، که معمولاً کوتاه‌تر از مقیاس زمان موضعی برای تبادل گرما است، حداقل در نقاط درونی‌تر ستاره. جابجایی و انبساط حباب گاز بسیار نزدیک به فرآیند آدیاباتیک رخ می‌دهد. نمای آدیاباتیک γ_{ad} پاسخ

لگاریتمی فشار به یک تغییر ادیاباتیک در چگالی را نشان می‌دهد. اگر تغییرات چگالی و فشار P_e و e عنصر گاز را در فاصله r بنویسیم بدست می‌آوریم

$$\frac{P_e}{P_e} = \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} \quad (257.1)$$

که $P_e = P_2$ با گرادیان فشار $dP=dr$ درون ستاره مشخص می‌شود چرا که $P_e = P_2$ یعنی $P_1 = P_2$ r ($dP=dr$). بنابراین تغییر در چگالی از رابطه قبل بدست می‌آید

$$\rho_e = \frac{1}{P_e} \frac{dP}{dr} \quad (258.1)$$

می‌توانیم بنویسیم $\rho_e = 1 + (d=dr) r$ و $2 = 1 + (d=dr) r$ که $d=dr$ گرادیان چگالی درون ستاره است. می‌توانیم شرط لازم برای پایداری در برابر همرفت $2 > \rho_e$ را به این صورت بنویسیم

$$\rho_e > \frac{d}{dr} r \quad (259.1)$$

که با ترکیب این معادله با معادله ۲۵۸.۱ حد بالا برای گرادیان چگالی برای این که یک لایه درون ستاره در برابر همرفت پایدار باشد را بدست می‌آوریم

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} < \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \quad (260.1)$$

توجه داشته باشیم که $dP=dr$ و $d=dr$ مقادیری منفی هستند. بنابراین اگر مقدار مطلق عبارت بالا را بدست آوریم علامت نامساوی معکوس می‌شود، که یعنی گرادیان چگالی باید بیشتر از یک مقدار آستانه باشد که با ρ_e تعیین می‌شود. اگر معادله قبل را تقسیم بر $dP=dr$ کنیم شرط کلی برای پایداری در برابر همرفت بدست می‌آید:

$$\frac{d \ln \rho_e}{d \ln P} > \frac{1}{\rho_e} \quad (261.1)$$

اگر معادله ۲۶۱.۱ نقض شود حرکت‌های همرفتی درون ستاره گسترش خواهند یافت. حباب گازی که به دلیل اختلال گرمایی کمی از محیط خود داغ‌تر است به بالا حرکت خواهد کرد و گرمای خود را به بالا منتقل خواهد کرد تا زمانی که از بین برود. حباب‌های دیگر ممکن است کمی سردتر از محیط خود باشند، که به سمت پایین حرکت خواهند کرد و کمی گرمای کمتری نسبت به محیط دارند. وقتی این حباب‌ها از بین بروند از محیط اطراف گرما جذب خواهند کرد. بنابراین هم حرکت‌های رو به بالا و هم رو به پایین حباب‌ها به طور مؤثر گرما را در جهت بالا منتقل خواهد کرد. بنابراین یک شار خالص رو به بالا وجود دارد اگر چه شار خالص گرمی وجود ندارد، چرا که حرکت‌های بالاسو و پایین سوی حباب‌ها مقدار برابری جرم جابجا می‌کند.

شرط شوارتزشیلد و لدوکس

شرط پایداری ۲۶۱.۱ چندان مورد استفاده عملی نیست چرا که مستلزم محاسبه گرادیان چگالی است. می‌توانیم معادله ۲۶۱.۱ را بر حسب دما با استفاده از معادله حالت بازنویسی نماییم. معادله حالت را در حالت کلی به صورت دیفرانسیلی می‌توان نوشت. فشار تابعی از چگالی، دما و وزن مولکولی است ($P = P(\rho_e; T; \mu)$) و

می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{dP}{P} = \tau \frac{dT}{T} + \frac{d}{P} + \frac{d}{P} \quad (262.1)$$

که ضرایب به این صورت تعریف شده‌اند

$$\tau = \frac{\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}}{\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}} = \frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial T} \quad (263.1)$$

$$= \frac{\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}}{\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}} = \frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial T} \quad (264.1)$$

$$= \frac{\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}}{\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}} \quad (265.1)$$

برای یک گاز کامل $\tau = 1$ است. با استفاده از معادله ۲۶۲.۱ می‌توانیم تغییرات چگالی با فشار درون ستاره را به این صورت بنویسیم

$$\frac{d \ln}{d \ln P} = \frac{1}{1} \tau \frac{d \ln T}{d \ln P} \quad \frac{d \ln}{d \ln P} = \frac{1}{1} (1 - \tau r) \quad (266.1)$$

در این جا تعریف کرده‌ایم $d \ln T = d \ln P$ که گرادیان واقعی دما بر حسب فشار است و r $d \ln = d \ln P$ تغییرات ترکیب شیمیایی (وزن مولکولی) محیط بر حسب فشار است. در حباب گازی که ترکیبات شیمیایی تغییر نکنند می‌توان نوشت

$$\frac{1}{ad} = \frac{1}{1} (1 - \tau r_{ad}) \quad (267.1)$$

بنابراین شرط پایداری برابر همرفت تبدیل می‌شود

$$r < r_{ad} - \frac{r}{T} \quad (268.1)$$

اگر همه انرژی توسط تابش منتقل شود داریم $r = r_{rad}$. بنابراین در معادله قبل به جای گرادیان واقعی گرادیان فشار می‌توان گذاشت و شرط لدوکس^{۲۶} که بیان می‌کند لایه درون ستاره در برابر همرفت پایدار است اگر:

$$r_{rad} < r_{ad} - \frac{r}{T} \quad (269.1)$$

اگر محیط از نظر ترکیبات شیمیایی همگن باشد $= 0$ و رابطه بالا به شرط شوارتزشیلد تقلیل می‌یابد:

$$r_{rad} < r_{ad} \quad (270.1)$$

²⁶Ledoux criterion

توجه داشته باشید که r_{rad} و r گرادیان فضایی دما و وزن متوسط مولکولی است. r_{ad} گرادیان تغییرات دما نسبت به فشار است. برای یک گاز کامل ($\gamma = 1$; $T = 1$) شرط لدوکس به رابطه زیر تقلیل می‌یابد

$$r_{\text{rad}} < r_{\text{ad}} + r \quad (271.1)$$

وزن مولکولی معمولاً به سمت داخل افزایش می‌یابد چرا که در لایه‌های عمیق‌تر واکنش‌های هسته‌ای عناصر سنگین بیشتری تولید می‌کند. بنابراین $r = 0$ بنابراین طبق شرط لدوکس گرادیان ترکیبات شیمیایی اثر پایدار کننده دارد.

۲.۲۱.۱ انتقال انرژی توسط همرفت و نظریه طول ادغام

برای پاسخ به این سوال که چقدر انرژی توسط همرفت منتقل می‌شود باید بدانیم که گرادیان دمای واقعی درون یک ناحیه همرفتی r چقدر است. برای پاسخ به این سوالات نیاز به یک نظریه همرفت دقیق داریم که خود نیازمند شبیه‌سازی‌های عددی پیچیده و حل معادلات هیدرودینامیک در سه بعد و در مقیاس ستاره است که در طی زمان حل شود و فشار و چگالی و دما را بطور دقیق در مسأله لحاظ شود. چنین شبیه‌سازی‌هایی نیازمند منابع و زمان زیاد است. در این جا می‌خواهیم یک نظریه یک بعدی و خیلی ساده به نام نظریه طول ادغام (MLT) معرفی نماییم.

در MLT حرکت‌های همرفتی پیچیده توسط حباب‌های گاز را که به سمت بالا یا پایین در راستای شعاعی به اندازه طول λ_m (طول ادغام) جابجا می‌شوند را تقریب می‌زنیم، که این حباب‌ها پس از طی طول ادغام با محیط اطراف ادغام می‌شوند و هویتشان را از دست می‌دهند. با از بین رفتن حباب انرژی اضافی خود را به محیط اطراف می‌دهد. طول ادغام λ_m یک پارامتر آزاد نامشخص است. می‌توان طول ادغام را از مرتبه مقیاس ارتفاع فشار در نظر گرفت که خود فاصله شعاعی است که فشار به اندازه ضریب e تغییر می‌کند

$$H_P = j \frac{dr}{d \ln P} j = \frac{P}{g} \quad (272.1)$$

این تساوی برای تعادل هیدروستاتیک برقرار است. در واقع می‌توان فرض کرد که طول ادغام ضریبی از مقیاس ارتفاع فشار است

$$\lambda_m = H_P \quad (273.1)$$

پارامتر آزاد نسبت طول ادغام به مقیاس ارتفاع فشار است که از مدل‌سازی‌های عددی و رصد می‌دانیم $0.5 < \lambda_m < 3$ است. بعد از این که حباب یک طول ادغام را طی کرد، شار گرمای اضافی در واحد حجم که حباب به محیط اضافه می‌کند هست

$$q = (c_p T) \quad (274.1)$$

با ضرب کردن سرعت متوسط حباب همرفتی v_c ، شار همرفتی (مقدار انرژی در واحد سطح در واحد زمان که توسط حباب حمل می‌شود) بدست می‌آید:

$$F_c = q v_c = (c_p T) v_c \quad (275.1)$$

توجه نمایید که v شار جرم یعنی مقدار جرم در واحد زمان است که از واحد سطح عمود بر راستای جریان می‌گذرد است.

²⁷Mixing Length Theory

سرعت متوسط v را می‌توان به این صورت پیدا کرد که اختلاف چگالی بین حباب گاز و محیط موجب پیدایش نیروی شناوری می‌شود که این نیروی شناوری شتابی را پدید می‌آورد که برابر است با:

$$a = g - \quad (276.1)$$

از معادله حالت با فرض این‌که گاز کامل است و ترکیبات شیمیایی همگن می‌توانیم بنویسیم

$$P = \frac{P}{T} + \frac{P}{T} T \quad (277.1)$$

از آنجا که فشار حباب با محیط برابر است $P = 0$ می‌توان نوشت

$$= \frac{P}{T} T \quad (278.1)$$

پس برای شتاب شناوری داریم

$$a = - g \frac{P}{T} \quad (279.1)$$

نیروی وارد بر حباب در واحد حجم می‌شود

$$f_{\text{net}} = \frac{g}{T} T \quad (280.1)$$

اگر حباب مسافت Δm را طی کند از سینماتیک می‌دانیم که می‌شود نوشت $\Delta m = \frac{1}{2} a t^2$ و سرعت متوسط حباب هست $\Delta m = t = \frac{1}{2} a \Delta m$ در نتیجه سرعت متوسط می‌شود نوشت

$$v_c = \frac{r}{\frac{1}{2} \frac{P}{T} \Delta m} \quad s = \frac{\Delta m}{\frac{1}{2} \frac{P}{T} \Delta m} \quad (281.1)$$

با قرار دادن در رابطه ۲۷۵.۱ داریم

$$F_{\text{conv}} = c_P T \frac{\Delta m}{H_P} \frac{1}{2} g H_P (r - r_{\text{ad}})^{3=2} \quad (282.1)$$

کمیت $r - r_{\text{ad}}$ ابر بی دررو بودن ^{۲۸} است که میزان فزونی گرادیان دما از مقدار بی دررو را نشان می‌دهد.

۲۲.۱ مدل‌های پلی تروپ

معادلات ساختار ستاره را به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \quad \frac{dP}{dm} = \frac{Gm}{4r^4} \quad (283.1)$$

²⁸Superadiabaticity

$$\frac{dm}{dr} = 4 r^2 \quad \frac{dr}{dm} = \frac{1}{4 r^2} \quad (284.1)$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3}{4acT^3} \frac{F}{4 r^2} \quad \frac{dT}{dm} = \frac{3}{4acT^3} \frac{F}{(4 r^2)^2} \quad (285.1)$$

$$\frac{dF}{dr} = 4 r^2 q \quad \frac{dF}{dm} = q \quad (286.1)$$

دو معادله ۲۸۳.۱ و ۲۸۴.۱ به دو معادله ۲۸۵.۱ و ۲۸۶.۱ از طریق وابستگی فشار به دما مرتبط هستند. اگر فشار تنها تابعی از چگالی باشد، دو معادله اول مستقل از هم خواهند بود و می‌توانند جداگانه حل شوند، یعنی تعادل هیدروستاتیک مستقل از شارش گرما خواهد بود. جواب‌های تحلیلی به این شکل بیش از یک قرن پیش بدست آمده‌اند. با ضرب کردن معادله ۲۸۳.۱ در r^2 و مشتق‌گیری نسبت به r داریم

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 dP}{dr} \right) = G \frac{dm}{dr} \quad (287.1)$$

با جایگذاری از معادله ۲۸۴.۱ در سمت راست بدست می‌آوریم

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 dP}{dr} \right) = 4 G \quad (288.1)$$

حال معادله حالتی به شکل زیر فرض می‌کنیم

$$P = K \quad (289.1)$$

که K و ضرایب ثابت هستند و معادله حالت بالا به عنوان معادله حالت پلی تروپ^{۲۹} شناخته می‌شود. شاخص پلی تروپ n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$= 1 + \frac{1}{n} \quad (290.1)$$

بنابراین معادله حالات یک گاز الکترونی غیر نسبیتی کاملاً تپه‌گن یک پلی تروپ با شاخص 1:5 است ($n = 3$) و در حالت نسبیتی ($n = 4$) است. یک گاز کامل نیز می‌تواند به صورت یک معادله حالت پلی تروپ تحت شرایط خاصی توصیف شود. با جایگذاری این تعریف‌ها در معادله ۲۸۷.۱ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بدست می‌آوریم:

$$\frac{(n+1)K}{4Gn} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{n} \frac{d}{dr} \right) = \quad (291.1)$$

جواب (r) در بازه $0 < r < R$ یک پلی تروپ است که مستلزم شرایط مرزی است. در $r = R$ یعنی سطح ستاره داریم $d = 0$ و در مرکز $r = 0$ داریم $d = dr = 0$ که از تعادل هیدروستاتیک نتیجه می‌شود.

²⁹Polytrope

کمیت بدون بعد را در بازه 1 تعریف می‌کنیم

$$= c^n \quad (292.1)$$

با جای‌گذاری در معادله ۲۹۱.۱ بدست می‌آوریم

$$\frac{(n+1)K}{4G} \frac{1}{c^{1-n}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} = n \quad (293.1)$$

ضریب داخل براکت مقدار ثابت است که بعد طول دارد

$$\frac{(n+1)K}{4G} \frac{1}{c^{1-n}} = n^2 \quad (294.1)$$

از این کمیت می‌توان برای تعریف متغیر بدون بعد استفاده کرد

$$r = \quad (295.1)$$

با جای‌گذاری این متغیرهای جدید معادله لین-امدن^{۳۰} با شاخص پلی تروپ n بدست می‌آید

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d} \frac{2}{d} = n \quad (296.1)$$

که شرایط مرزی جدید عبارتند از $= 1$ و $d = 0$ در مکان $= 0$. معادله ۲۹۶.۱ را می‌توان برای $n < 5$ حل کرد و از $= 0$ تا $= 1$ انتگرال گرفت

$$R = 1 \quad (297.1)$$

جرم کل M برای یک ستاره پلی تروپ را می‌توان به این صورت حساب کرد

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^1 c^{\frac{1}{2-n}} d \quad (298.1)$$

با استفاده از معادله لین-امدن ۲۹۶.۱ داریم

$$M = 4\pi \int_0^1 c^{\frac{1}{2-n}} \frac{d}{d} \frac{2}{d} d = 4\pi \int_0^1 c^{\frac{2}{1-n}} \frac{d}{d} \quad (299.1)$$

با حذف کردن با استفاده از روابط قبل یک رابطه خطی بین چگالی مرکزی و چگالی متوسط بدست می‌آوریم

$$c = D_n = D_n \frac{M}{\frac{4}{3}R^3} \quad (300.1)$$

³⁰Lane-Emden

ضریب ثابت D_n از حل معادله لین-امدن بدست می‌آوریم

$$D_n = \frac{1}{\frac{3}{1} \frac{d}{d} 1} \quad (30.1.1)$$

با حذف c و جایگذاری از معادله ۲۹۶.۱ رابطه‌ای بین جرم و شعاع می‌توان بدست آورد که بر حسب M_n و R_n به این شکل نوشته می‌شود

$$\frac{GM}{M_n}^{n-1} \frac{R}{R_n}^{3-n} = \frac{[(n+1)K]^n}{4G} \quad (30.2.1)$$

که $M_n = \frac{2}{1}(d=d_1)$ و $R_n = 1$ هستند که با شاخص پلی تروپ n تغییر می‌کنند. در حالت خاص $n=3$ جرم مستقل از شعاع می‌شود و تنها با ثابت K تعیین می‌شود

$$M = 4 M_3 \frac{K}{G}^{3=2} \quad (30.3.1)$$

بنابراین برای مقدار مشخص K تنها یک مقدار ممکن برای جرم ستاره وجود دارد که در تعادل هیدروستاتیک صدق می‌کند. حالت خاص دیگر $n=1$ است که شعاع مستقل از جرم می‌شود و فقط با ثابت K تعیین می‌شود

$$R = R_1 \frac{K}{2G}^{1=2} \quad (30.4.1)$$

برای مقادیر $1 < n < 3$ رابطه بین شعاع و جرم می‌شود

$$R^{3-n} / \frac{1}{M^{n-1}} \quad (30.5.1)$$

یعنی شعاع با افزایش جرم کاهش می‌یابد و در این حالت ستاره با جرم بیشتر، کوچک‌تر خواهد بود. آخرین رابطه مهم رابطه فشار مرکز و چگالی مرکز برای پلی تروپ است که با استفاده از $P_c = K \frac{1}{c}^{1+\frac{1}{n}}$ داریم

$$P_c = \frac{(4G)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \frac{GM}{M_n}^{\frac{n-1}{n}} \frac{R}{R_n}^{\frac{3-n}{n}} \frac{n+1}{c^{\frac{n}{n}}} \quad (30.6.1)$$

با حذف شعاع در این رابطه و جمع کردن همه ضرایب وابسته به n در ثابت B_n رابطه بالا به این صورت تقلیل می‌یابد

$$P_c = (4)^{1=3} B_n G M^{2=3} \frac{4=3}{c} \quad (30.7.1)$$

یعنی فشار مرکزی فقط از طریق ضریب B_n به معادله پلی تروپ مرتبط می‌شود. مقادیر ضرایب پلی تروپ در جدول ۲۲.۱ خلاصه شده‌اند.

B_n	R_n	M_n	D_n	nheight
۲۳۳.۰	۱۴.۳	۱۴.۳	۲۹۰.۳	۰.۱
۲۰۶.۰	۶۵.۳	۷۱.۲	۹۹۱.۵	۵.۱
۱۸۵.۰	۳۵.۴	۴۱.۲	۴۰.۱۱	۰.۲
۱۷۰.۰	۳۶.۵	۱۹.۲	۴۱.۲۳	۵.۲
۱۵۷.۰	۹۰.۶	۰.۲.۲	۱۸.۵۴	۰.۳
۱۴۵.۰	۵۴.۹	۸۹.۱	۹.۱۵۲	۵.۳
				ضرایب ثوابت پلی تروپ

انرژی پتانسیل گرانشی یک مدل پلی تروپ با شاخص پلی تروپ n با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_{gr} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{nR} \quad (۳۰۸.۱)$$

۲۳.۱ برخی روابط در تعادل هیدروستاتیک

- در هر ستاره‌ای در حال تعادل تابع زیر به سمت سطح ستاره نزولی است:

$$P(r) + \frac{GM^2(r)}{8r^4} \quad (309.1)$$

با استفاده از معادله تعادل هیدروستاتیک و رابطه‌ی جرم و چگالی داریم

$$\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)}{4r^4} \frac{dM(r)}{dr} \quad (310.1)$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه‌ی ۳۰۹.۱ داریم

$$\frac{d}{dr} \left(P(r) + \frac{GM^2(r)}{8r^4} \right) = \frac{dP}{dr} + \frac{GM(r)}{4r^4} \frac{dM(r)}{dr} - \frac{GM^2(r)}{2r^5}$$

با استفاده از رابطه‌ی ۳۱۰.۱ جملات اول و دوم حذف می‌شوند

$$\frac{d}{dr} \left(P(r) + \frac{GM^2(r)}{8r^4} \right) = \frac{GM^2(r)}{2r^5} < 0 \quad (311.1)$$

- با استفاده از نتیجه‌ی قبل می‌توانیم بنویسیم

$$P_c > P + \frac{GM^2(r)}{8r^4} > \frac{GM^2}{8R^4} \quad ! \quad P_c > \frac{GM^2}{8R^4} \quad (312.1)$$

- برای هر ستاره‌ای در حال تعادل اگر $4 < \dots$ باشد داریم

$$I = \int_0^R \frac{GM(r)dM(r)}{r} = 4 \int_0^R P(r)r^3 dr \quad (313.1)$$

با استفاده از معادله تعادل هیدروستاتیک (۳۱۰.۱) و تعریف I ، داریم

$$I = 4 \int_0^R \frac{dP}{dr} r^4 dr$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء از این رابطه بدست خواهیم آورد

$$I = 4 \int_0^R P(r)r^3 dr \quad (314.1)$$

- برای هر ستاره در حال تعادل اگر $4 < \dots$ باشد رابطه‌ی زیر برقرار است

$$P_c R^4 + \frac{4}{8} \frac{GM^2}{R} > I > \frac{GM^2}{2R} \quad (315.1)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۳۱۳.۱ و رابطه‌ی ۳۱۲.۱

$$I = 4 \int_0^R P(r) r^3 dr$$

و

$$\frac{GM^2}{8R^4} \leq \frac{GM^2(r)}{8r^4} < P < P_c \leq \frac{GM^2(r)}{8r^4}$$

داریم

$$4 \int_0^R P_c \frac{GM^2(r)}{8r^4} r^3 dr > I > 4 \int_0^R \frac{GM^2}{8R^4} \frac{GM^2(r)}{8r^4} r^3 dr \quad (316.1)$$

با فرض ثابت بودن فشار مرکزی، انتگرال را باز می‌کنیم

$$4 P_c R^4 > I + \frac{4}{2} \int_0^R \frac{GM^2(r) dr}{r^{1+}} > \frac{GM^2}{2R} \quad (317.1)$$

حال انتگرال را می‌توانیم به این شکل بنویسیم

$$\int_0^R \frac{GM^2(r)}{r^{1+}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R GM^2(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) dr \quad (318.1)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء

$$\int_0^R \frac{GM^2(r)}{r^{1+}} dr = \frac{GM^2}{R} + \frac{2}{2} \int_0^R \frac{GM(r) dM(r)}{r} = \frac{GM^2}{R} + \frac{2}{2} I \quad (319.1)$$

با قرار دادن معادله‌ی ۳۱۹.۱ در رابطه‌ی ۳۱۷.۱ بدست می‌آوریم

$$4 P_c R^4 > I + \frac{4}{2} I \quad \frac{4}{2} \frac{GM^2}{R} > \frac{GM^2}{2R} \quad (320.1)$$

که با مرتب کردن جملات نتیجه مورد نظر را بدست می‌آوریم

$$P_c R^4 + \frac{4}{8} \frac{GM^2}{R} > I > \frac{GM^2}{2R}$$