



به نام خدای مهربان

آزمون میان‌ترم مدرسه‌ی تابستانی نجوم

۳۱ تیر ۱۳۸۹

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

۱. سیاره‌ای روی مدار بیضی با نیم‌قطر بزرگ a و خروج از مرکز e در حرکت است. سیاره در نقطه‌ی A از مدار جایی که بردار شعاع آن عمود بر بردار خروج از مرکز \vec{r} است ($v = 90^\circ$)، سیارگی را در امتداد بردار سرعت (\vec{V}_A) خود مشاهده می‌کند. در نقطه‌ای دیگر از مدار (نقطه‌ی B) دوباره سیارک در امتداد بردار سرعت سیاره (\vec{V}_B) قرار می‌گیرد. اگر \vec{V}_A عمود بر \vec{V}_B باشد و سیارک در فضا همواره ثابت باشد.
- الف) زاویه برادر \vec{V}_A با بردار \vec{e} را بر حسب مفروضات مسئله دست آورید.
- ب) فاصله‌ی ستاره را از کانون نزدیک به حقیض حساب کنید.
- ج) \vec{r}_B بردار شعاع سیاره در نقطه B را حساب کنید.
۲. الف) با فرض اینکه گاز داخل ستاره از معادله پل‌تروپیک به شکل
- $$P = K \rho^{\gamma}$$
- تبعیت می‌کند که در آن K و γ مقادیری ثابت‌اند. رابطه‌ی جرم و شعاع را بدست آورید.
- ب) نشان دهید که معادله حالت توده‌ای از گاز با جرم ثابت که در حال انقباض گراشی آرام (تبادل کلونین هلم هولتز است)، به شکل پل‌تروپیک با نمای $\gamma = \frac{4}{3}$ است.
۳. عبدالرحمن صوفی رازی (۳۷۶ - ۲۹۱ هجری قمری؛ ۹۸۶ - ۹۰۳ میلادی)، در سال ۳۵۳ هجری قمری (۹۶۴ میلادی) کتاب «صورالکواکب» را به پایان رساند. او در این کتاب، ضمن بررسی صورت‌های فلکی مختلف، جدولی از بر نور ترین ستارگان هر صورت فلکی آورده است. در این جدول برای هر ستاره قدر ظاهری و طول و عرض دایره البروجی ذکر شده است. در مجموع کتاب او دربردارنده ی ۱۰۲۷ ستاره است که در بین آنها به حدود ۱۰ جرم غیر ستاره ای (کهکشان آندرومدا، خوشه‌ی دوگانه، خوشه‌ی کندو و ...) به عنوان سحابی اشاره شده است.



به عنوان نمونه او اطلاعات آلفای برساوش ($\alpha - per$) را به صورت زیر ثبت کرده است :

طول دایره البروجی	$47^{\circ}32'$
عرض دایره البروجی	$+30^{\circ}31'$
قدر ظاهری	2

ماهوره ابرغسی در سال ۱۹۹۱ میلادی آلفای برساوش را با دقت رصد کرد و مختصات زیر را ثبت کرد.

بعد (درجه)	51.08061917
میل (درجه)	+49.86124305
حرکت ویژه در راستای بعد (ثانیه قوسی بر سال)	0.02375
حرکت ویژه در راستای میل (ثانیه قوسی بر سال)	-0.02623
قدر ظاهری	1.8972

خطای صوفی را در اندازه گیری طول و عرض دایره البروجی آلفای برساوش محاسبه کنید. (تمایل مدار زمین نسبت به استوا را 23.5° درجه بگیرید)

۴. در این مساله قصد داریم با توجه به فراوانی عناصر رادیواکتیوی مانند ^{238}U و ^{235}U سن برخی از اجرام کیهانی را تخمین زده و با کمک آن مدول فاصله $\mu \equiv m - M$ را تعیین کنیم. برای این کار به رابطه تلاشی مواد رادیواکتیو به صورت $A(T) = A_{in} \exp(-\lambda T)$ توجه می‌کنیم. در این رابطه A_{in} فراوانی اولیه ماده، $A(T)$ فراوانی در زمان T و λ آهنگ تلاشی می‌باشد. از آنجا که فراوانی اولیه مواد معمولاً با عدم قطعیت بزرگی همراه است بر این اساس اندازه‌گیری سن با توجه به فراوانی نسبی دو عنصر مختلف انجام می‌گیرد. فرض کنید ^{238}U و ^{235}U به ترتیب دارای آهنگ تلاشی $0.971 \times 10^{-9}/yr$ و $0.154 \times 10^{-9}/yr$ باشند. در جدول زیر فراوانی نسبی کنونی $\frac{A_{in}^{235}}{A_{in}^{238}}$ و سن تخمینی برای تعدادی از اجرام کیهانی که در انتقال به سرخ‌های مختلفی قرار گرفته‌اند، آمده است. با فرض اینکه تمام سن‌های محاسبه شده دارای خطای پواسونی باشند.
- الف) فراوانی نسبی اولیه $\frac{A_{in}^{235}}{A_{in}^{238}}$ و خطای آن را برای اجرام ذکر شده در جدول زیر را حساب کنید.
- ب) حد بالای انتقال به سرخ این اجرام و خطای آن را بیابید. (بسط را تا مرتبه دوم در نظر بگیرید)
- ج) فاصله درخشدگی D_L را محاسبه نمایید (طول همراه را تا مرتبه دوم بسط بر حسب انتقال به سرخ در نظر بگیرید)
- د) مدول فاصله $\mu \equiv m - M$ و خطای مربوط به آن را محاسبه نمایید.



ه) در کیهانی با هندسه‌های غیر تخت یعنی $\Omega_K = -0.1$ و $\Omega_K = 0.5$ ، مدول فاصله برای این اجرام چقدر خواهد بود؟

شماره جرم کیهانی	$\frac{A_{\Gamma}^{235}}{A_{\Gamma}^{238}}$	سن (میلیارد سال)
۱	۰/۰۰۰۰۷۸	۱۳/۳۱
۲	۰/۰۰۰۰۹۳	۱۴/۷۳
۳	۰/۰۰۰۰۶۵	۱۴/۰۹
۴	۰/۰۰۰۰۴۳	۱۱/۴۰
۵	۰/۰۰۰۰۲۱	۱۰/۷۸

مقادیر و شکل‌های مورد نیاز:

سن کیهان ما برابر با $t_0 = 13.46 \text{ Gyr}$ است. $H_0 = 70 \text{ km/sMpc}$ ، $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

