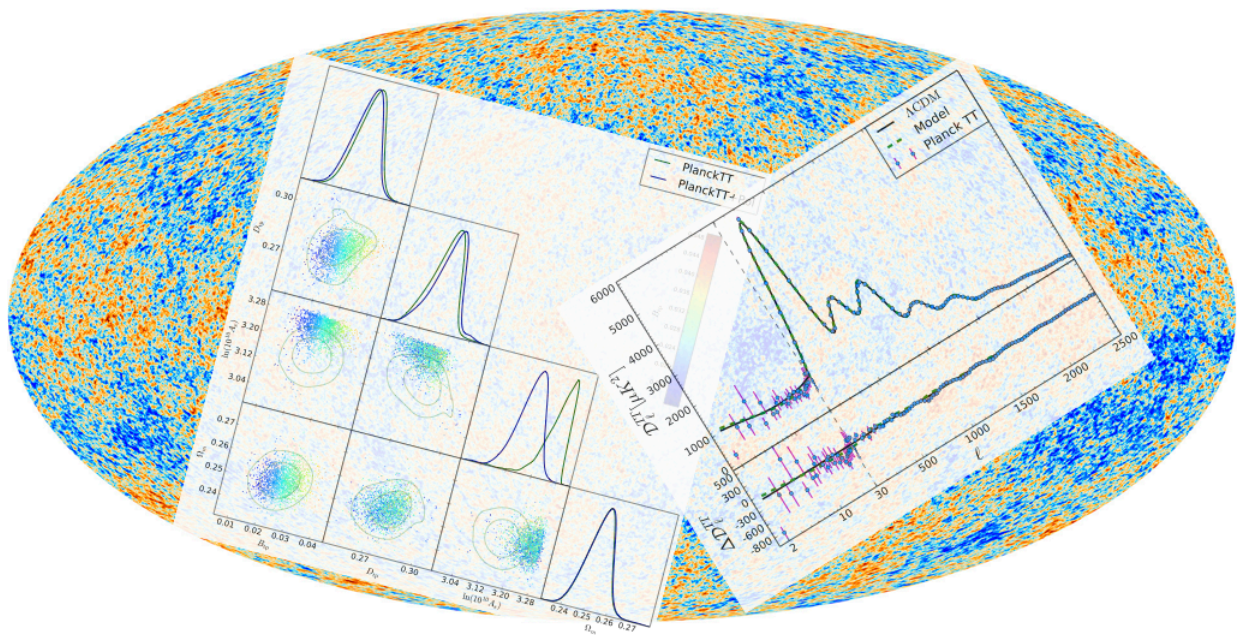


آشنایی با کدهای کیهان‌شناسی CosmoMC و CAMB



تهیه کننده
دکتر حسین مصحفی

۱.۰ مقدمه

در نظریه اختلال‌های کیهانی اختلال‌های فوتون به صورت تغییرات کوچک دمای فوتون تعریف می‌شوند

$$T(\vec{k}, \mu, \eta) = T^{(0)}(\eta) \left[1 + \Theta(\vec{k}, \mu, \eta) \right], \quad \mu = \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{kp} \quad (1)$$

چون در فضای فوریه کار می‌کنیم، $\vec{k}$ تبدیل فوریه‌ی مکان $\vec{x}$ است و تکانه فوتون $\vec{p}$ است. اختلال‌های فوتون، Θ فقط به جهت $\vec{p}$ وابسته است و نه اندازه‌اش. وابستگی به جهت همان چیزی است که موجب ناهمسان‌گردی‌های CMB شده است. اختلال فوتون می‌تواند بر حسب چند قطبی‌ها به این شکل بسط داده شود

$$\begin{aligned} \Theta_l &= \frac{i^l}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu) d\mu, \\ \Leftrightarrow \quad \Theta(\mu) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{i^l} \Theta_l \mathcal{P}_l(\mu) \end{aligned} \quad (2)$$

که $\mathcal{P}_l(\mu)$ چند جمله‌ای‌های لژاندر است. علاوه بر اختلال‌های دمایی فوتون، اختلال‌های قطبش فوتون نیز وجود دارد که با $\Theta_P(\mu)$ نشان می‌دهند.

معادلات حرکت اختلال‌ها از معادلات بولتزمان برای فوتون‌ها، ماده تاریک سرد (CDM)، باریون‌ها و نوترینوها تبعیت می‌کنند. چون CDM و باریون‌ها غیر نسبیتی هستند، می‌توانیم دو ممان اول معادلات‌شان را به کار گیریم. علاوه بر معادلات بولتزمان، معادلات اینشتین نیز دو معادله برای اختلال‌های پتانسیل گرانشی می‌دهند. در مجموع معادلات تحول اختلال‌ها با مجموعه معادلات زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta} + ik\mu\Theta &= -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau} \left[\Theta_0 - \Theta + i_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2\Pi \right], \\
\dot{\Theta}_P + ik\mu\Theta_P &= -\dot{\tau} \left[-\Theta_P + \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P}_2)\Pi \right], \\
\dot{\delta} - kv &= -3\dot{\Phi}, \quad \dot{v} + \mathcal{H}v = -k\Psi \\
\dot{\delta}_b - kv_b &= -3\dot{\Phi}, \\
\dot{v}_b + \mathcal{H}v_b &= -k\Psi + \dot{\tau}R(v_b + 3\Theta_1), \\
\dot{\mathcal{N}} + ik\mu\mathcal{N} &= -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi, \\
k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\dot{\Phi} - \mathcal{H}\Psi) &= 4\pi Ga^2[\rho\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_r\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0], \\
k^2(\Phi + \Psi) &= -32\pi Ga^2[\rho_r\Theta_2 + \rho_\nu\mathcal{N}_2], \\
\Pi &= \Theta_2 + \Theta_2^P + \Theta_0^P, \quad R = \frac{4\rho_r}{3\rho_b} = \frac{4\Omega_r}{3\Omega_b a} \quad (3)
\end{aligned}$$

اگر این معادلات را بر حسب چند قطبی‌ها بسط دهیم، معادلات برای Θ ، Θ_P و $\mathcal{N}$ به صورت مجموعه معادلات سلسله مراتبی در می‌آید

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}_0 + k\Theta_1 &= -\dot{\Phi}, \\
\dot{\Theta}_1 - \frac{k}{3}\Theta_0 + \frac{2k}{3}\Theta_2 &= \frac{k}{3}\Psi + \dot{\tau} \left[\Theta_1 + \frac{1}{3}v_b \right], \\
\dot{\Theta}_l - \frac{lk}{2l+1}\Theta_{l-1} + \frac{(l+1)k}{2l+1}\Theta_{l+1} &= \dot{\tau} \left[\Theta_l - \frac{1}{10}\Pi\delta_{l,2} \right], \quad (l \geq 2) \\
\dot{\Theta}_0^P + k\Theta_1^P &= \dot{\tau} \left[\Theta_0^P - \frac{1}{2}\Pi \right], \\
\dot{\Theta}_l^P - \frac{lk}{2l+1}\Theta_{l-1}^P + \frac{(l+1)k}{2l+1}\Theta_{l+1}^P &= \dot{\tau} \left[\Theta_l^P - \frac{1}{10}\Pi\delta_{l,2} \right], \quad (l \geq 1) \\
\dot{\mathcal{N}}_0 + k\mathcal{N}_1 &= -\dot{\Phi}, \\
\dot{\mathcal{N}}_1 - \frac{k}{3}\mathcal{N}_0 + \frac{2k}{3}\mathcal{N}_2 &= \frac{k}{3}\Psi, \\
\dot{\mathcal{N}}_l - \frac{lk}{2l+1}\mathcal{N}_{l-1} + \frac{(l+1)k}{2l+1}\mathcal{N}_{l+1} &= 0, \quad (l \geq 2) \quad (4)
\end{aligned}$$

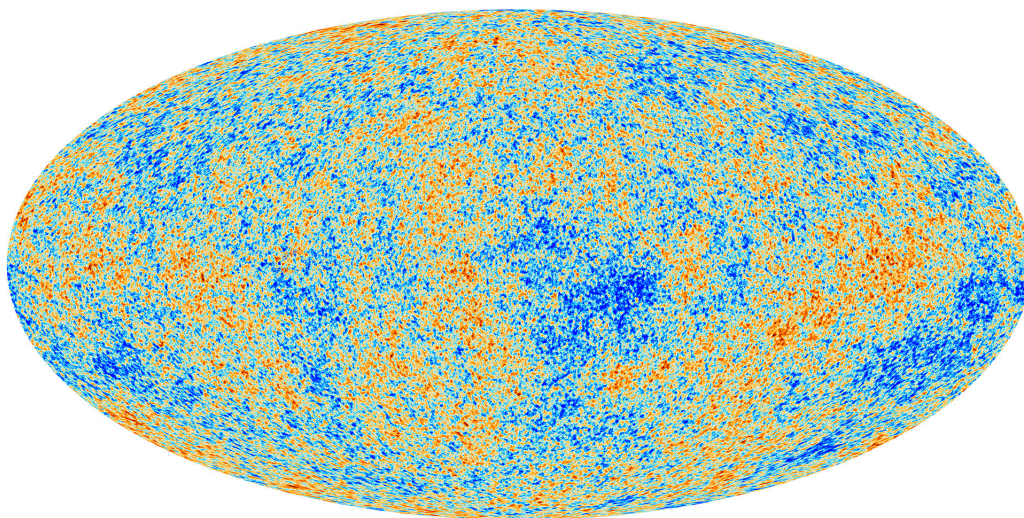
با استفاده از تغییر متغیر $x \equiv \ln a$ مشتق را به این شکل باز تعریف می‌نماییم $\equiv \frac{d}{dx}$. در این صورت معادلات به این صورت در می‌آیند

$$\begin{aligned}
\Theta'_0 &= -\frac{k}{\mathcal{H}}\Theta_1 - \Phi', \\
\Theta'_1 &= \frac{k}{3\mathcal{H}}\Theta_0 - \frac{2k}{3\mathcal{H}}\Theta_2 + \frac{k}{3\mathcal{H}}\Psi + \tau' \left[\Theta_1 + \frac{1}{3}v_b \right], \\
\Theta'_l &= \frac{lk}{(2l+1)\mathcal{H}}\Theta_{l-1} - \frac{(l+1)k}{(2l+1)\mathcal{H}}\Theta_{l+1} + \tau' \left[\Theta_l - \frac{1}{10}\Pi\delta_{l,2} \right], \quad (l \geq 2) \\
\Theta'_{P0} &= -\frac{k}{\mathcal{H}}\Theta_1^P + \tau' \left[\Theta_0^P - \frac{1}{2}\Pi \right], \\
\Theta'_{Pl} &= \frac{lk}{(2l+1)\mathcal{H}}\Theta_{l-1}^P - \frac{(l+1)k}{(2l+1)\mathcal{H}}\Theta_{l+1}^P + \tau' \left[\Theta_l^P - \frac{1}{10}\Pi\delta_{l,2} \right], \quad (l \geq 1) \\
\mathcal{N}'_0 &= -\frac{k}{\mathcal{H}}\mathcal{N}_1 - \Phi', \\
\mathcal{N}'_1 &= \frac{k}{3\mathcal{H}}\mathcal{N}_0 - \frac{2k}{3\mathcal{H}}\mathcal{N}_2 + \frac{k}{3\mathcal{H}}\Psi, \\
\mathcal{N}'_l &= \frac{lk}{(2l+1)\mathcal{H}}\mathcal{N}_{l-1} - \frac{(l+1)k}{(2l+1)\mathcal{H}}\mathcal{N}_{l+1}, \quad (l \geq 2) \\
\delta' &= \frac{k}{\mathcal{H}}v - 3\Phi', \\
v' &= -v - \frac{k}{\mathcal{H}}\Psi, \\
\delta'_b &= \frac{k}{\mathcal{H}}v_b - 3\Phi', \\
v'_b &= -v_b - \frac{k}{\mathcal{H}}\Psi + \tau'R(3\Theta_1 + v_b), \\
\Phi' &= \Psi - \frac{k^2}{3\mathcal{H}^2}\Phi + \frac{H_0^2}{2\mathcal{H}^2} [\Omega_m a^{-1}\delta + \Omega_b a^{-1}\delta_b + 4\Omega_r a^{-2}\Theta_0 + 4\Omega_\nu a^{-2}\mathcal{N}_0], \\
\Psi &= -\Phi - \frac{12H_0^2}{k^2 a^2} [\Omega_r \Theta_2 + \Omega_\nu \mathcal{N}_2], \quad (5)
\end{aligned}$$

۱.۱.۰ طیف ناهمسان‌گردی‌ها

وقتی به یک نقشه‌ی CMB از آسمان نگاه می‌کنیم (شکل ۱) در واقع به مقادیر چندقطبی‌های دمایی $\Theta_l(k)$ در آسمان امروز می‌نگریم. این را می‌توان با انتگرال‌گیری از مجموعه معادلات ۵ از یک x_i تا $x = 0$ بدست آورد. اما برای این کار دو مشکل وجود دارد که رسیدن به مقصود را بسیار پر زحمت می‌نماید. اول، به صورت صریح باید تمام چندقطبی‌ها را تا بالاترین مقدار ℓ که مدنظر است، مثلاً تا $\ell \sim 1200$ به حساب بیاوریم که مجموعه معادلات را بسیار بزرگ می‌کند. دوم، باید معادلات را تا مقادیر بسیار بزرگ عدد موج k مثلاً تا چند هزار انتگرال بگیریم تا نتیجه دقیق و قابل قبولی بدست آوریم. این بدان معناست که حتی با رایانه‌های سریع و محاسباتی امروز نیز این کار چندین ساعت زمان خواهد برد. خوشبختانه، زمان محاسبه با استفاده از روش

انتگرال‌گیری در راستای خط دید که اولین بار توسط سلجاک^۱ و زالداریگا^۲ ابداع شد چندین مرتبه بزرگی کاهش یافته است.



شکل ۱: ناهمسان‌گردی‌های دمایی مشاهده شده توسط ماهواره پلانک

برای محاسبه‌ی طیف ناهمسان‌گردی‌های تابش زمینه‌ی کیهانی باید مجموعه معادلات^۵ به همراه شرایط اولیه‌ای که از مدل‌های تورمی به دست می‌آید را حل نماییم. در ادامه یکی از کدهایی که این کار را برای ما انجام می‌دهد را معرفی خواهیم نمود.

۲.۰ کد CAMB

کد CAMB^۳ یکی از مشهورترین کدهای محاسبه‌ی طیف ناهمسان‌گردی‌ها و اختلال‌ها می‌باشد که بر اساس کد CMBFAST توسط Anthony Lewis و Anthony Challinor به زبان Fortran 90 و جهت استفاده در محیط سیستم عامل‌های Unix نوشته شده است.

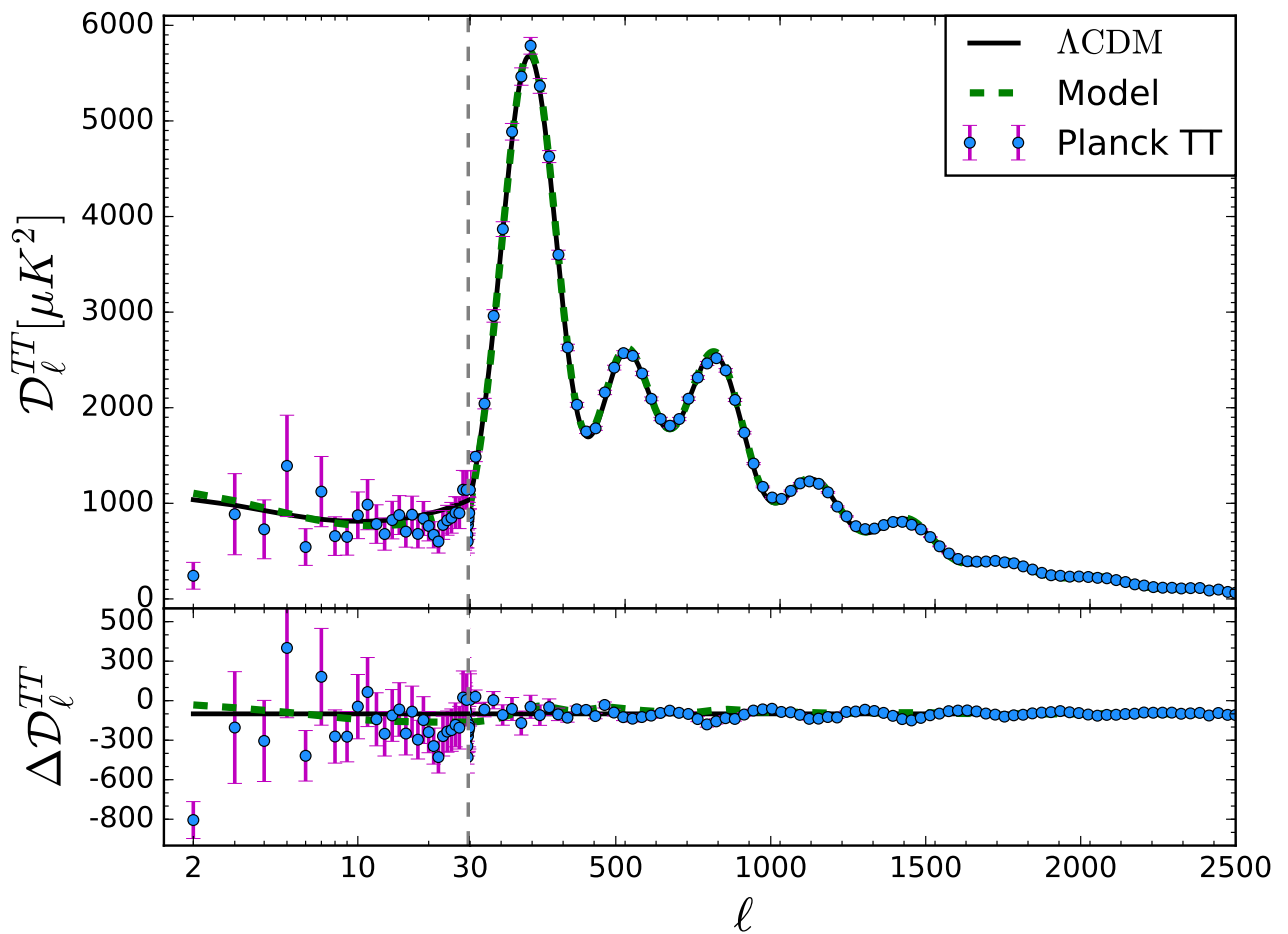
در واقع کد کَمب یک مجموعه کد برای محاسبه‌ی طیف توان افت‌وخیزهای تابش پس زمینه کیهانی و دیگر مشاهده‌پذیرهای کیهانی است. این کد به صورت منظم در حال توسعه و بهینه‌سازی است و سرعت محاسبات و دقت محاسبات آن به اندازه‌ای است که توسط گروه‌های تحقیقاتی مختلف از جمله گروه پروژه تلسکوپ پلانک نیز مورد استفاده واقع شده است.

این کد بر اساس کد قدیمی‌تر به نام CMBFAST نوشته شده که توسط سلجاک و زالداریگا توسعه داده شده بود و خود این کد بر اساس کد بولتزمان که توسط Bertschinger Edmund ، Chung-Pei و Bode Paul

¹U. Seljak

²M. Zaldarriaga

³Code for Anisotropies in the Microwave Background



شکل ۲: طیف توان ناهمسان‌گردی‌های تابش زمینه بدست آمده از کد CAMB در مقایسه با داده‌های تلسکوپ پلانک

نوشته شده بود. برای دریافت آخرین نسخه از کد گمب می‌توان به سایت <http://camb.info> مراجعه نمود. با استفاده از این کد می‌توان اثر تغییر پارامترهای مدل را بر روی طیف ناهمسان‌گردی‌ها مشاهده نمود. این کد با زبان FORTRAN90 نوشته شده و در سیستم‌های عامل UNIX با کامپایلرهای متنوعی از قبیل Gfortran و یا Intel Fortran قابل کامپایل و اجرا است. خروجی اصلی این کد یک فایل متنی شامل طیف‌های توان مختلف بر حسب چندقطبی‌ها است. به طور مثال یکی از اصلی‌ترین خروجی این کد فایلی به صورت `test_scaleCls.dat` است که طیف توان اختلال‌های اسکالر مربوط به ماده را در خود دارد. ستون‌های این فایل به این شکل هستند

$$\ell \quad \ell(\ell+1)C_{TT} \quad \ell(\ell+1)C_{EE} \quad \ell(\ell+1)C_{TE} \quad (6)$$

که هر طیف توان C_X در واقع به صورت $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$ است. برای اختلال‌های تانسوری نیز این کد خروجی متناسب را ارائه می‌کند. همچنین اگر در فایل ورودی درخواست نماییم تا توزیع ماده را حساب کند،

فایل‌های مربوط به تابع انتقال و طیف ماده را نیز تولید می‌نماید.
در کد CAMB توسط یک فایل ورودی، مقادیر پارامترها و خروجی‌های مورد نظر تعیین و تنظیمات دلخواه تعیین می‌شود که این فایل به صورت پیش‌فرض params.ini نام دارد. بعد از تعیین ورودی‌ها در این فایل با دستور زیر می‌توان کد را اجرا کرد:

./camb params.ini

یکی از مهمترین کاربردهای کد کَـمب، توانایی تغییر کدها برای مدل‌های دلخواه است. با دانستن و شناخت بخش‌های مختلف کد می‌توان برای مدل‌های کیهان‌شناختی مختلف در این کد تغییرات مناسبی ایجاد کرد تا محاسبات مورد نظر را برای مدل انجام دهد. در این جا مهم‌ترین فایل‌هایی که در مجموعه کد CAMB وجود دارد را معرفی و نقش هر یک را به اختصار بیان می‌نماییم.

- **camb.f90** شامل رویه‌های اصلی برای اجرای کَـمب است. با استفاده از دستور `camb use` در برنامه‌های فرترنی دلخواه و فراخوانی `CAMB_GetResults` می‌توان از خروجی‌های کد کَـمب در برنامه‌های خود استفاده نماییم.

- **cmbmain.f90** زیررویه‌هایی شامل انتگرال‌گیری و غیره برای مدل‌های تخت و باز.

- **equations.f90** این فایل شامل معادلات کیهان زمینه و تحول اختلال‌هاست. معادلات اختلال‌ها در این جا در پیمانه‌ی هموردا، که نسبت به چارچوب CDM (شتاب صفر) ثابت است بدست آمده‌اند که معادل با معادلات پیمانه‌ی همزمان است.

- **power_tilt.f90** این فایل شامل یک مائول به نام `InitialPower` است که طیف توان نخستین را تولید می‌کند. با استفاده از تغییر این مائول و تعریف پارامترهای جدید برای مدل‌های تورمی مختلف می‌توان طیف توان بدست آورد.

- **reionization.f90** این کد یک مائول تعریف می‌کند به نام `Reionization` که تاریخ‌چه‌ی باز یونش را پارامتر بندی می‌کند و یک تابع به نام `Reionization_xe` می‌دهد که `x_e` را بر حسب انتقال به سرخ می‌دهد.

- **inidriver.F90** این فایل مربوط به خواندن پارامترها از یک فایل ورودی است که به صورت جفت‌های `name/value` است.

- **modules.f90** مائول‌های مختلفی که توسط بخش‌های دیگر برنامه استفاده شده‌اند در این جا هستند، مائول `ModelParams` شامل اغلب پارامترهای مدل است. متغیرهای بولین `flat`، `open`، `closed` نوع مدل را تعیین می‌کنند.

• **recfast.f90** این همان کد معروف RECFAST است که توسط Douglas Scott نوشته شده است و برای محاسبه‌ی بازترکیب به کار می‌رود.

۳.۰ گام نهادن در فضای پارامتری با CosmoMC

کد CosmoMC یک موتور MCMC^۴ به زبان FORTRAN90 است برای کاوش فضای پارامترهای کیهان‌شناختی به همراه کدی برای تحلیل نمونه‌های مونته کارلو. این کد به همراه کد CAMB طیف‌توان ناهمسان‌گردی و ماده را سریع (اما با دقت) محاسبه می‌نماید. همچنین این کد می‌تواند بدون هیچ کد کیهان‌شناختی به عنوان یک نمونه‌گیر عام عمل نماید.

این کد روی یک رایانه‌ی چند پردازنده‌ای ظرف چند ساعت نتایج خوبی می‌دهد. روی یک رایانه‌ی تک پردازنده زمان بیشتری طول می‌کشد. همچنین قابلیت اجرا روی خوشه‌ای از پردازنده‌های (Cluster) را نیز دارد. به صورت پیش فرض، CosmoMC از یک الگوریتم ساده‌ی Metropolis استفاده می‌کند، اما در خود برنامه قابلیت انتخاب دیگر الگوریتم‌ها برای تابع توزیع‌های دشوار یا افزایش سرعت آنالیز وجود دارد. کد CosmoMC به عنوان ورودی، تخمینی از مقادیر مرکزی و prior را برای پارامترهای مختلف می‌گیرد. چگالی پیشنهادی^۵ می‌تواند اطلاعاتی پیرامون همبستگی پارامترها را از یک ماتریس هموردا^۶ استفاده نماید: از آن می‌توان استفاده کرد اگر واقعاً سرعت محاسبه را بهبود می‌بخشد.

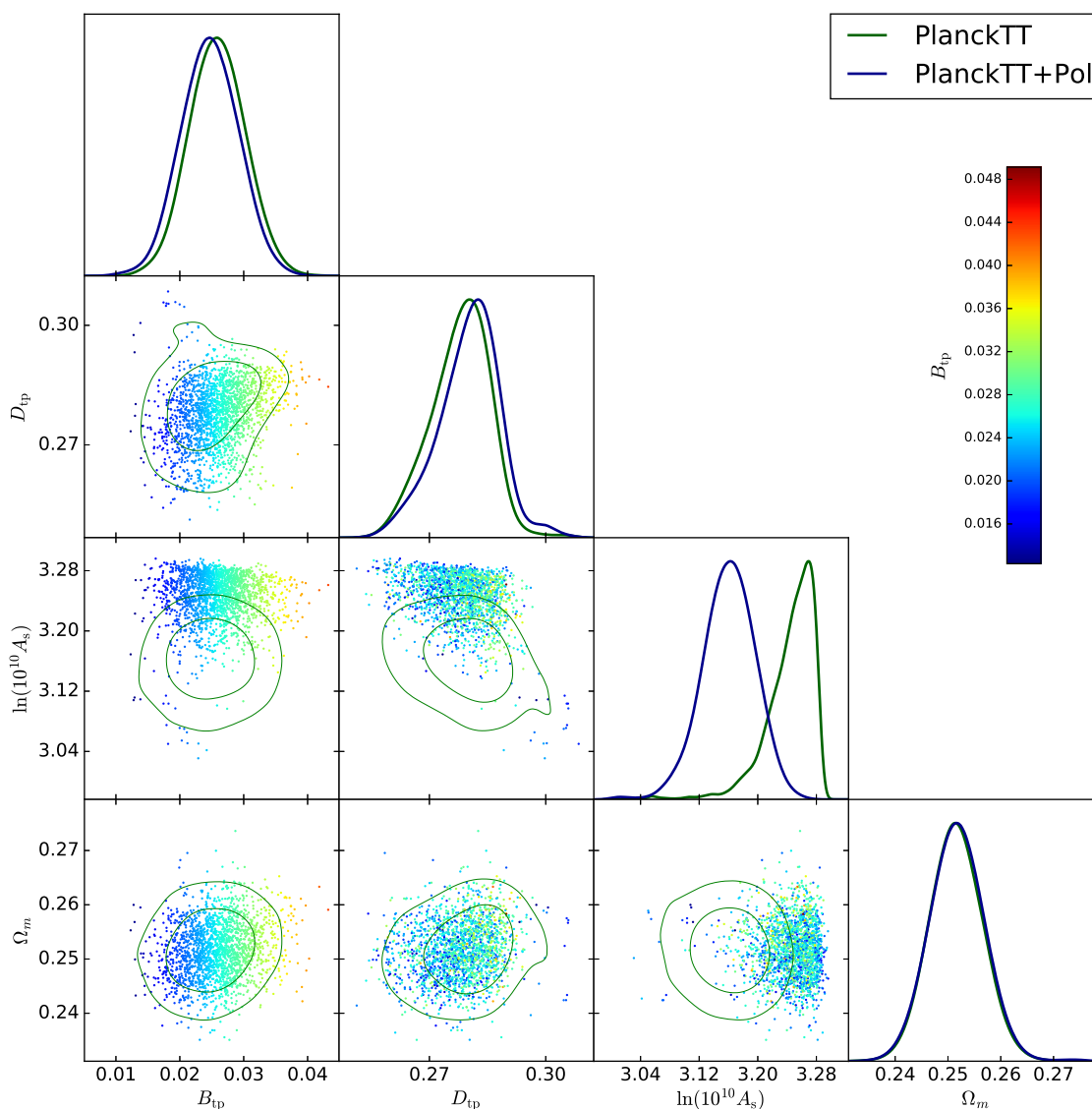
دو برنامه مختلف در این کد وجود دارند: `cosmomc` و `getdist`. برنامه اول یک محاسبه‌ی مونته کارلو انجام می‌دهد و مجموعه‌ای از فایل‌های زنجیره‌ای با فرمت `*.txt` تولید می‌کند. برنامه‌ی `getdist` فایل‌های زنجیره‌ای را تحلیل می‌نماید و آمار را محاسبه می‌نماید و فایل‌هایی برای تولید نمودارهای یک بعدی، ۲ بعدی و ۳ بعدی تولید می‌نماید. کل برنامه از آدرس <http://cosmologist.info/cosmomc> قابل دریافت است. پیش نیاز اصلی برای نصب این برنامه یک کامپایلر فرترن مناسب نظیر Intel Fortran است و با توجه به نوع داده‌هایی که در آنالیز می‌خواهیم استفاده کنیم به کتابخانه‌هایی نظیر CFITSIO، GSL، FFTW ممکن است نیاز داشته باشیم. اگر بخواهیم از داده‌های تابش پس زمینه کیهانی که توسط تلسکوپ پلانک تهیه شده استفاده نماییم می‌بایست کد Planck Likelihood را نیز نصب کنیم.

این کد بطور پیش فرض شامل مجموعه‌ای از داده‌ها از جمله: داده‌های ابرنواختر (کاتالوگ‌های JLA، Union، SNLS)، داده‌های پارامتر هابل HST، داده‌های مربوط به تشکیل ساختار مانند BAO، RSD (کاتالوگ‌های متعدد مانند SDSS، 6DF، WiggleZ و ...)، داده‌های مربوط به همگرایی گرانشی کهکشان‌ها، داده‌های شمارش خوشه‌های سونیاف - زلدوویچ (SZ)، و دیگر داده‌ها می‌باشد. همچنین با تغییراتی می‌توان

⁴Markov-Chain Monte-Carlo

⁵Proposal density

⁶Covariance matrix



شکل ۳: کانتورها و نتایج آنالیز درست‌نمایی بدست آمده بوسیله کد CosmoMC

داده‌های دلخواه رصدی دیگر را نیز به این کد افزود.

۱.۳.۰ اجرای برنامه و وارد کردن پارامترها

بعد از نصب برنامه بر روی یک سیستم عامل مناسب (بطور مثال یکی از توزیع‌های لینوکس Ubuntu) و تنظیم فایل‌های کتابخانه‌های مورد نیاز و کامپایل کردن کدهای برنامه دو فایل باینری به نام‌های `cosmomc` و `getdist` ساخته می‌شوند که هر کدام یک فایل ورودی برای پارامترها دارند. برای استفاده از برنامه `cosmomc` یک فایل پیش فرض به نام `test.ini` در پوشه مربوط به کد وجود دارد. برای اجرای برنامه در سیستم عامل

لینوکس کافیست دستور زیر را در ترمینال وارد نماییم:

```
./cosmomc test.ini
```

اگر روی یک خوشه از پردازنده‌ها یا سیستم‌های دارای چند پردازنده این کد را اجرا نمائیم برای تعیین تعداد پردازنده مورد استفاده در اجرای کد به طریق زیر دستور اجرا را وارد می‌نمائیم:

```
mpirun -np 4 ./cosmomc test.ini
```

برای استفاده از برنامه‌ی `getdist` نیز کافیست دستور زیر را برای استفاده از فایل پارامتر تایپ نماییم:

```
./getdist distparams.ini
```

در فایل مربوط به پارامترهای `cosmomc` امکانات متعدد و گزینه‌های بسیاری وجود دارد که برای اهداف مختلف می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. مشابه کد `CAMB` که ذکر شد برای هر مدل کیهان‌شناختی می‌توان کد `CosmoMC` را به طور مناسب تغییر داد تا برای پارامترهای مدل جدید قیده‌ای رصدی را محاسبه نماید. به همین دلیل، شناخت بخش‌های مهم کد ضروری به نظر می‌رسد.

- `settings.f90` می‌توانید تعداد پارامترها از هر نوع را در این جا تعریف نمایید. اگر پارامترهای بیشتری دارید در این جا باید تغییر دهید.

- `Calculator_Cosmology.f90` و `Calculator_CAMB.f90` رویه‌های تولید طیف‌های توان ناهمسان‌گردی، طیف توان ماده و σ_8 را در خود جای داده‌اند. با تغییر کلاس محاسباتی در `Calculator_Cosmology.f90` می‌توان کیهان‌شناسی مورد نظر خود یا کد بولتزمان دیگری را در آن اعمال کرد.

- `DataLikelihoods.f90` در این جا می‌توانید توابع درست‌نمایی جدید را اضافه کنید.

- `driver.f90` در این برنامه پارامترها را خوانده شده و بخش `MCMC` فراخوانی می‌شود.

- `propose.f90` این برنامه شامل چگالی احتمال پیشنهادی و ثوابت و زیربرنامه‌های مرتبط است. بازدهی بخش `MCMC` کاملاً وابسته به این چگالی پیشنهادی است. زیرفضاهای پارامتری `Fast` و `Slow` بطور جداگانه در این کد اعمال می‌شوند.