سیستم های دوتایی ستارگان

تالیف: نیما چرتاب سلطانی
تاریخ نگارش: ۱۵مهر ۱۳۸۷
گروه المپیاد نجوم تبریز

دو ستاره که تحت گرانش همدیگر در مداری تناوبی به دور یکدیگر می گردند؛ تشکیل یک سیستم دوتایی را می دهند. هر دو ستاره ی نزدیک به هم را نمی شود یک سیستم دوتایی تلقی کرد بنابراین شناسایی چنین سیستم هایی مستلزم رصد های نسبتا دراز مدتی برای مشاهده ی حرکت تناوبی یشان می باشد. حدود دویست سال پیش ویلیام هرشل اولین کسی بود که چنین سیستم هایی را کشف کرد. از آن پس سیستم های دوتایی متعددی کشف و مدارهای آن ها مورد تحلیل قرار گرفت. تحلیل مداری سیستم های دوتایی اطلاعات مفیدی از جمله جرم، دما و شعاع ستارگان را در اختیار ما قرار می دهد به همین دلیل چنین سیستم هایی بسیار حائز اهمیت هستند.

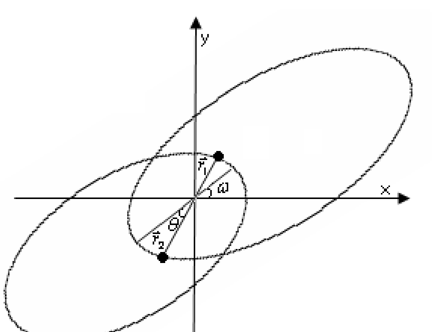
مکان ناظر نسبت به سیستم ها ی دوتایی باعث می شود دوتایی ها در چندین گروه رده بندی شوند که از آن جمله می شود به دوتایی های دیداری، طیف سنجی، گرفتی اشاره کرد. دوتایی های دیداری سیستم های دوگانه ای از ستارگان هستند که جدایی زاویه ای آن ها در آسمان به گونه ای است که به شکل دو ستاره منفرد قابل تفکیک هستند. دوتایی های طیف سنجی و گرفتی حاوی اطلاعات با اهمیتی هستند که در این فصل قصد بررسی داده های حاصل از بررسی این سیستم ها را داریم.

الف: پارامتر های مداری

هر یک از ستارگان سیستم های دوتایی در مدارهای بیضوی در حال حرکت به دور مرکز جرم هستند. دقت کنید که مرکز جرم همیشه باید ما بین خط واصل دو ستاره باشد و با توجه به تعریف باید هر لحظه حاصلضرب جرم در فاصله از مرکز جرم برای هر دو ستاره مقدار برابری شود.

$$\boxed{M_1 r_1 = M_2 r_2}$$

با توجه به شکل ۱ می شود مختصات هر ستاره را در دستگاه مختصاتی که هم صفحه با صفحه ی مداری است بدست آورد. جهت x را در این دستگاه خط گره می نامیم. خط گره خط مشترک بین صفحه ی مداری و صفحه ی آسمان می باشد که فاصله ی زاویه ای حضیض از این خط را طول حضیض(ω) می نامند.

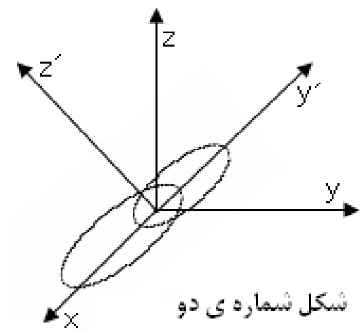


شکل شماره ی یک

$x_1 = r_1 \cos(\omega + \theta) \quad , \quad x_1 = -r_2 \cos(\omega + \theta)$

$y_1 = r_1 \sin(\omega + \theta) \quad , \quad y_1 = -r_2 \sin(\omega + \theta)$

می خواهیم دستگاه مختصاتی کارتزینی را تعریف کنیم که صفحه ی xy آن صفحه ی آسمان ناظر باشد. این دستگاه را دستگاه پریم دار و دستگاهی که صفحه ی xy آن صفحه ی مداری دوتایی است دستگاه بدون پریم می نامیم. با توجه به شکل ۲ تبدیلات دستگاه بدون پریم به دستگاه پریم دار بصورت زیر انجام خواهد شد که در آن i پارامتر دیگری است که نشانگر زاویه ی بین صفحه ی مداری با صفحه ی آسمان ناظر می باشد.



شکل شماره ی دو

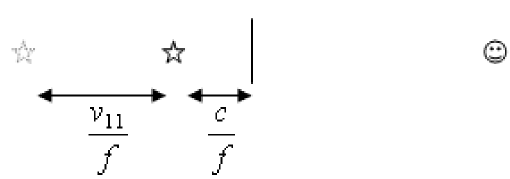
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x'_1 = r_1 \cos(\omega + \theta) \\ y'_1 = r_1 \sin(\omega + \theta) \cos i \\ z'_1 = r_1 \sin(\omega + \theta) \sin i \end{cases}$$

به دلیل دور بودن سیستم های دوتایی ناظر تنها مختصه ی x و y این سیستم را می تواند رصد کند. مبدا دستگاه مختصات پریم داری که تعریف کرده ایم را بر روی ستاره ی اول قرار می دهیم و مدار نسبی ستاره دوم نسبت به اولی با مختصات زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} X := x'_1 - x'_2 = (r_1 + r_2) \cos(\omega + \theta) \\ Y := y - y'_2 = (r_1 + r_2) \sin(\omega + \theta) \cos i \\ Z := z'_1 - z'_2 = (r_1 + r_2) \sin(\omega + \theta) \sin i \end{cases}$$

مقدار Z برای ناظر قابل مشاهده نمی باشد ولی تغییرات آن نسبت به زمان را می شود با استفاده از اثر دوپلر محاسبه کرد. با صرف نظر از اثرات نسبیتی می توان با استفاده از محاسبه ی مقدار جابجایی طول موج رسیده تغییرات Z نسبت به زمان یا به عبارتی سرعت شعاعی را محاسبه کرد.

با توجه به شکل ۳ از یک ستاره هر دو پالس الکترومغناطیسی متوالی در فاصله ی $\frac{c}{f}$ از یکدیگر ساطع می شوند که در آن c سرعت نور و f فرکانس حقیقی پالس ارسالی می باشد. اگر ستاره نسبت به ناظر متحرک باشد در این مدت به اندازه ی $\frac{v_\parallel}{f}$ جابجا خواهد شد. بنا بر این چنین رابطه ای بین سرعت شعاعی و تغییر در طول موج مشاهده شده $(\Delta\lambda)$ از این پالس خواهد بود. $\frac{v_\parallel}{f} + \frac{c}{f} = \frac{c}{f'} \Longrightarrow \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_\parallel}{c}}$



شکل شماره ی سه

اگر با استفاده از رابطه ی ارائه شده سرعت شعاعی هر یک از ستارگان عضو سیستم دوتایی را بر حسب زمان رسم کنیم به نموداری می رسیم که به منحنی سرعت معروف است. از منحنی سرعت می شود مستقیما خروج از مرکز مدار ستاره ها و طول حضیض را حساب و همچنین در مورد پارامترهای دیگر بحث کرد.

ب: منحنی سرعت

برای تعیین مقدار سرعت شعاعی کافیست از مقدار z بر حسب زمان مشتق گیری کنیم. در حالت کلی مرکز جرم سیستم نیز می تواند نسبت به ناظر سرعت شعاعی داشته باشد که در اینصورت به سرعت محاسبه شده در زیر مقدار ثابتی اضافه خواهد شد که ما از نوشتن آن خودداری می کنیم. از این پس $r_1 + r_2$ را با r نمایش خواهیم داد.

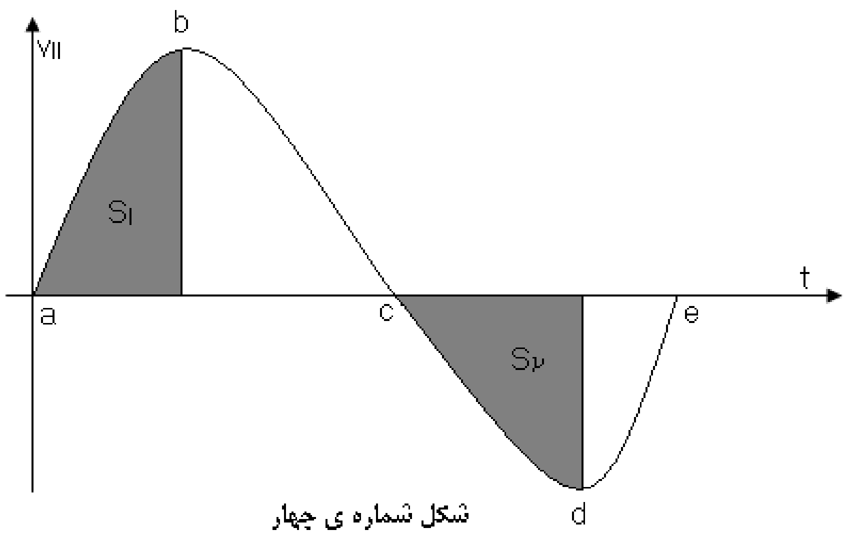
$$v_{\parallel_1} = \frac{dz_1}{dt} = \sin i\,(\dot{r}_1 \sin(\omega+\theta) + r_1\dot{\theta}\cos(\omega+\theta))$$

$$M_1 r_1 = M_2 r_2\ ,\ \ r_1 + r_2 = r \Longrightarrow r_1 = \frac{M_2}{M_1+M_2} r$$

$$\dot{r} = \frac{le\sin\theta}{a(1-e^2)}\ ,r\dot{\theta} = \frac{l}{r}\ \ \Longrightarrow \boxed{v_{\parallel_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l\sin i}{a(1-e^2)}(e\cos\omega + \cos(\theta+\omega))}$$

که در آن a نیم محور اطول مدار نسبی و e خروج از مرکز مداری و l تکانه ی زاویه ای واحد جرم مدار نسبی است.

شکل ۴ نمودار معادله ی داده شده را نمایش می دهد. می خواهیم به وسیله ی نمودار زیر پارامتر های سیستم دوتایی را تا جایی که ممکن است تعیین کنیم.



شکل شماره ی چهار

بیشترین و کمترین سرعت شعاعی ستاره زمانی اتفاق می افتد که ستاره بر روی خط گره باشد بنابر این:

$$\begin{cases} A := v_{\parallel_{max}} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\dfrac{l\sin i}{a(1-e^2)}(e\cos\omega + 1) \\ B := v_{\parallel_{min}} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\dfrac{l\sin i}{a(1-e^2)}(e\cos\omega - 1) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{e\cos\omega = \frac{A+B}{A-B}},\boxed{n := \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l\sin i}{a(1-e^2)} = \frac{(A-B)}{2}}$$

از مساحت زیر منحنی می شود رابطه ی دیگری بین خروج از مرکز و طول حضیض بدست آورد. با توجه به شکل ۴ می شود نوشت:

$$s_1 = \int_{Z_a}^{Z_b} dZ = Z_b - Z_a = -Z_a \,, s_2 = \int_{Z_c}^{Z_d} dZ = Z_d - Z_c = -Z_c$$

مقدار Z_d و Z_b صفر است زیرا در این لحظات که ستاره بیشترین سرعت شعاعی را دارد بر روی خط گره بوده و مولفه ی Z نخواهد داشت. ولی در نقاط Z_a و Z_c سرعت شعاعی صفر است یعنی:

$$v_{\parallel} = n(e\cos\omega + \cos(\theta+\omega)) = 0 \Longrightarrow \cos(\theta+\omega)) = -e\cos\omega$$

$$\sin(\theta+\omega)) = \pm\frac{2\sqrt{-AB}}{A-B}$$

شرط بدست آمده در نقطه ی a مقدار منفی معادله ی بالا و نقطه ی c مقدار مثبت را به خود می گیرد.

$$\begin{cases} s_1 = -\frac{2\sqrt{-AB}}{A-B} r_a \sin i \\ s_2 = -\frac{2\sqrt{-AB}}{A-B} r_c \sin i \end{cases} \Longrightarrow \frac{s_1}{s_2} = -\frac{r_a}{r_c} \Longrightarrow \boxed{e\sin\omega = \frac{2\sqrt{-AB}}{A-B}\frac{s_1+s_2}{s_1-s_2}}$$

که استنتاج رابطه ی بالا از نسبت مساحت ها به خواننده واگذار می شود.

از دو معادله ی اخیر می شود مقدار خروج از مرکز و طول حضیض را برای یک سیستم دوتایی محاسبه کرد.

مقدار n را بر حسب نیم محور اطول مدار جسم یک و تکانه ی زاویه ای واحد جرم جسم اول می نویسیم:

$$n = \frac{l_1 \sin i}{a_1(1-e^2)} \text{ و } l_1 = \frac{2\pi a_1^2\sqrt{1-e^2}}{p} \Longrightarrow \boxed{a_1 \sin i = \frac{p}{4\pi}(A-B)\sqrt{(1-e^2)}}$$

در رابطه ی بالا p دوره ی تناوب مداری است که به راحتی قابل تعیین است. مقدار نیم محور بزرگ جسم مشاهده پذیر قابل تعیین نیست مگر اینکه میل مداری مشخص باشد.

اگر بتوانیم از هر دو ستاره ی یک سیستم دوتایی طیف گیری کنیم در اینصورت نسبت جرم ستارگان را نیز می توانیم تعیین کنیم.

از روابط فوق به سادگی دیده می شود که :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

اگر میل مداری مشخص باشد می شود جرم تک تک مولفه ها را نیز حساب کرد.

ج: دوتایی های گرفتی

دوتایی های گرفتی دوتایی هایی هستند که نسبت به ناظر به صورت تناوبی همدیگر را می پوشانند. در این قسمت فرض می کنیم مدار ستارگان به دور مرکز جرم دایروی است. برای مدارهای بیضوی نیز می شود روابط این قسمت را بازنویسی کرد ولی این کار از پیچیدگی ریاضی خاصی برخوردار است.

در حالت کلی فاصله ی دو ستاره در آسمان ناظر را می شود به صورت زیر محاسبه کرد:

$$D := \sqrt{X^2 + Y^2} = r\sqrt{1 - \sin^2(\omega + \theta)\sin^2 \mathrm{i}}$$

چون مدار دایروی است r مقدار ثابتی خواهد بوده و مقدار ω صفر می باشد بنابراین:

$$D := \sqrt{X^2 + Y^2} = r\sqrt{1 - \sin^2(\theta)\sin^2 \mathrm{i}}$$

کمترین مقدار D زمانی است که مقدار زاویه ی θ برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد. یک سیستم دوتایی زمانی می تواند گرفتی باشد که کمترین فاصله ی مراکزشان از دید ناظر کمتر از مجموع شعاع ستارگانش باشد.

$$\text{شرط گرفتی بودن} \Longrightarrow \mathrm{D_{min}} < \mathrm{R_1} + \mathrm{R_2} \Longrightarrow \boxed{\cos i < \frac{\mathrm{R_1}+\mathrm{R_2}}{r}}$$

اگر شرط بدست آمده در یک سیستم دوتایی صادق باشد این سیستم را دوتایی گرفتی گویند.

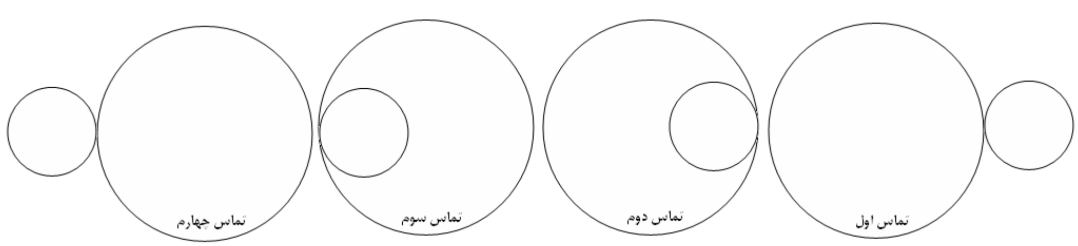
سیستم های دوتایی گرفتی خود نیز می تواند به دو گونه گرفت از خود نشان دهند: ۱) گرفت کلی که در آن ستاره ی کوچک تر توسط ستاره ی بزرگتر کاملا پوشانده شود ۲) گرفت جزئی که در آن قسمتی از ستاره ی کوچک تر توسط ستاره ی بزرگتر پوشانده می شود

حالت اول زمانی اتفاق می افتد که کمترین فاصله ی دو ستاره از تفاضل شعاع هایشان کمتر باشد.

$$\text{شرط گرفت کلی} \Longrightarrow \mathrm{D_{min}} < \mathrm{R_1} - \mathrm{R_2} \Longrightarrow \boxed{\cos i < \frac{\mathrm{R_1}-\mathrm{R_2}}{r}}$$

و اگر شرط فوق برای یک دوتایی گرفتی صادق نباشد آن دوتایی گرفتی، گرفت جزئی خواهد داشت.

مدت گرفت را می شود به صورت دقیق برای سیستم های دوتایی محاسبه کرد. شروع و پایان گرفت زمانی است که فاصله ی مراکز ستارگان برابر مجموع شعاع آن ها باشد که آن را به ترتیب تماس اول و تماس چهارم نیز می نامند.



شکل شماره ی پنج

مقدار θ را می شود برای مدارهای دایروی با ωt نمایش داد که در آن ω سرعت زاویه ای نسبی ستارگان است.

$$\text{شروع و پایان گرفت} \Longrightarrow R_1 + R_2 = r\sqrt{1 - \sin^2(\omega t)\sin^2 i}$$

از رابطه ی فوق می شود دو جواب مثبت برای ωt بدست آورد که نشان دهنده ی شروع و پایان گرفت می باشد پس اگر T را مدت گرفت تعریف کنیم؛ می توان نوشت:

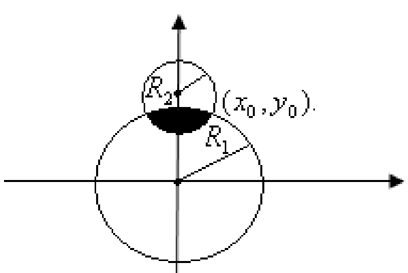
$$\boxed{T' = \frac{2}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sin i}\sqrt{1 - \left(\frac{R_1+R_2}{r}\right)^2}\right)}$$

برای دوتایی های گرفتی که در آن ها گرفت کامل انجام می شود می شود مدت گرفت دیگری را تعریف کرد که در آن ستاره ی کوچکتر کاملا توسط ستاره ی کوچکتر پوشیده شود یا به عنوانی دیگر، ستاره ی کوچکتر به طور کامل وارد ستاره ی بزرگتر شود. اگر این مدت زمان گرفت را با T' نشان دهیم در اینصورت:

$$\boxed{T' = \frac{2}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sin i}\sqrt{1 - \left(\frac{R_1-R_2}{r}\right)^2}\right)}$$

روشنایی دریافتی ار یک ستاره متناسب با سطحی است که از آن می بینیم. هنگامی که یکی از ستارگان بطور کامل وارد دیگری شده باشد در اینصورت محاسبه ی مساحت مشترک به سادگی قابل محاسبه است ولی هنگامی که اینگونه نباشد محاسبات کمی پیچیده تر می شود. این مساحت مشترک را می شود از راه هندسی نیز محاسبه کرد ولی چون به یک رابطه ی منسجمی نمی رسد به جای ارائه ی چنین روشی از انتگرالگیری برای حساب مساحت مشترک استفاده می کنیم.

با توجه به شکل ۶ اگر مولفه ی x نقطه ی برخورد را به دست آوریم که آن را x_0 بنامیم در اینصورت با حساب انتگرالی مساحت مشترک به صورت زیر محاسبه می شود.



شکل شماره ی شش

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R_1^2 \\ x^2 + (y-D)^2 = R_2^2 \end{cases} \Longrightarrow x_0 = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{R_2^2 - R_1^2 - D^2}{2D}\right)^2}$$

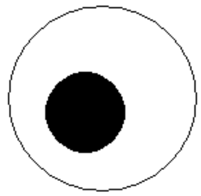
اگر از دو معادله ی دایره ی ارائه شده انتگرال بگیریم و از همدیگر کم کنیم مساحت مشترک آن ها چنین بدست می آید:

$$\boxed{S = x_0\left(\sqrt{R_1^2 - x_0^2} - \sqrt{R_2^2 - x_0^2}\right) + R_1^2\sin^{-1}\frac{x_0}{R_1} - R_2^2\sin^{-1}\frac{x_0}{R_2} + 2Dx_0}$$

که با معلوم بودن فاصله D که خود تابعی از زمان است و شعاع ستارگان مساحت مشترک از رابطه ی فوق قابل محاسبه است.

به هنگام گرفت کامل طبق شکل ۷ مساحت مشترک از رابطه ی زیر پیروی می کند.

$$\boxed{S = \pi R_{۲}^{۲}}$$

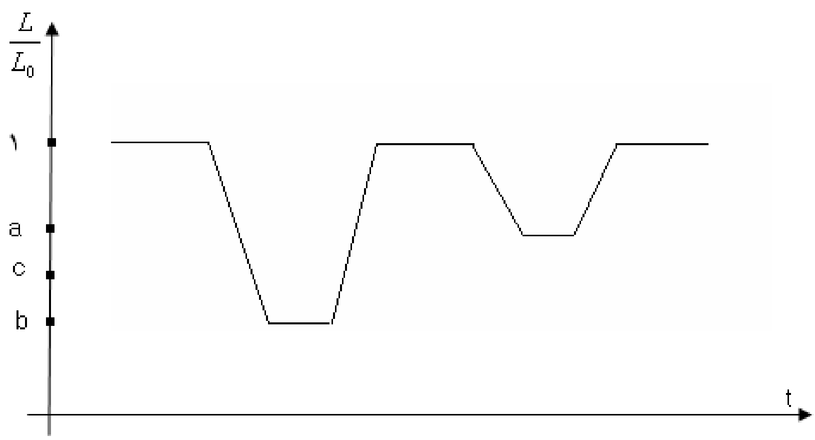


شکل شماره ی هفت

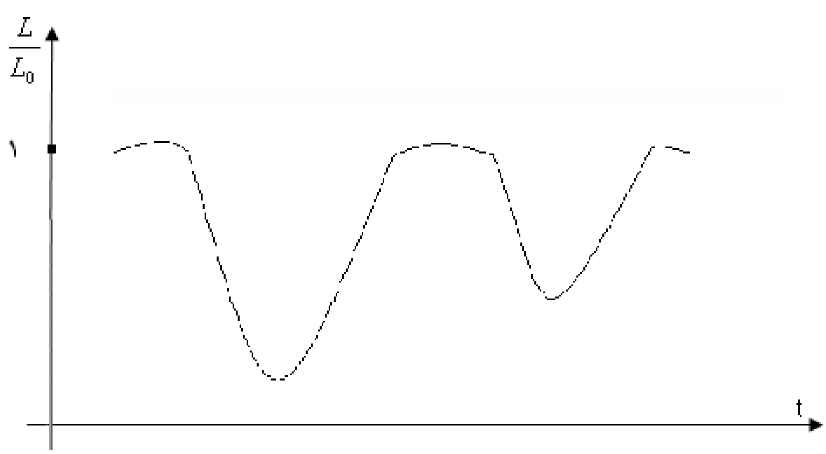
د: منحنی نوری

منحنی نوری نموداری است که روشنایی سیستم دوتایی را بر حسب زمان نشان می دهد.

همانطور که در شکل ۸-الف می بینید گرفت کامل انجام شده است ولی در شکل ۸-ب در کل گرفت، تنها قسمتی از ستاره ی کوچکتر پوشیده می شود.



شکل شماره ی هشت الف



شکل شماره ی هشت ب

فرض کنید شعاع ستاره ی پر نورترکوچک تر باشد. اگر میل مداری به گونه ای باشد که دوتایی گرفتی، گرفت کاملی داشته باشد در اینصورت از روی منحنی نوری می شود میل مداری و نسبت شعاع ستارگان را محاسبه کرد. با توجه به فرض هایی که در نظر گرفته ایم کمینه اول در روشنایی، زمانی است که ستاره ی بزرگتر از جلوی ستاره ی کوچکتر می گذرد کمینه ی بعدی مربوط به عبور ستاره کوچکتر از ستاره ی بزرگتر می باشد. درخشندگی ستاره ی یک را با $L_۱$ و ستاره ی دوم را با $L_۲$ نمایش می دهیم. $L_۱ < L_۲$ در اینصورت با توجه به اینکه در خشندگی متناسب با مساحت است نقاط b و a بر روی نمودار تعیین می شوند.

$$\begin{cases} \boxed{a = \frac{L_۱}{L_۱+L_۲}} \\ \boxed{b = \frac{L_۲+L_۱(۱-\left(\frac{R_۲}{R_۱}\right)^۲)}{L_۱+L_۲}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{R_۲}{R_۱} = \sqrt{\frac{۱-b}{a}}}$$

اگر مساحت مشترک بین دو ستاره را بدانیم درخشندگی هر نقطه ی دلخواهی را می توانیم محاسبه کنیم. مثلا برای نقطه ی دلخواه c اگر مساحت مشترک دو ستاره در آن لحظه s باشد در اینصورت مقدار c چنین خواهد بود:

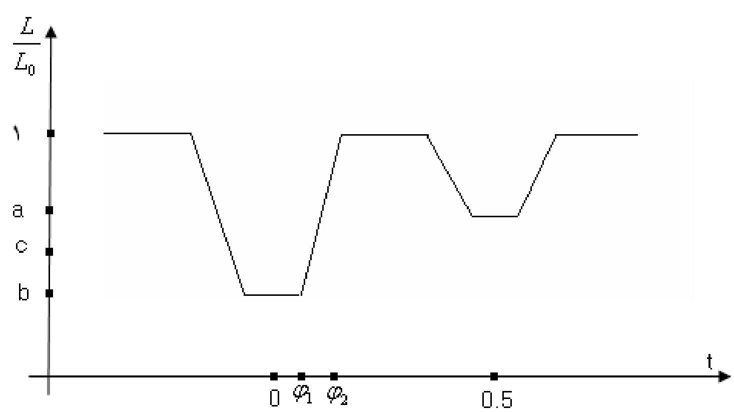
$$\boxed{c = \frac{L_۲+L_۱(۱-\left(\frac{S}{\pi R_۱}\right)^۲)}{L_۱+L_۲}}$$

منحنی نوری را می توان بر حسب زاویه ی فاز نیز رسم کرد. زاویه ی فاز زاویه ای است که بر روی صفحه ی مداری ستاره ها اندازه گیری می شود. معمولا مبدا آن در کمینه ی گرفت ها می باشد بنا بر این فاصله ی دو ستاره بر حسب زاویه ی فاز چنین خواهد بود.

$$D = r\sqrt{۱ - \cos^۲(\varphi)\sin^۲ i}$$

شکل ۹ منحنی نوری یک سیستم دوتایی را بر حسب زاویه ی فاز نشان می دهد، که می شود به سادگی روابط زیر را برای فاز های نشان داده شده در شکل نوشت:

$$\begin{cases} R_۱ + R_۲ = r\sqrt{۱ - \cos^۲(\varphi_۲)\sin^۲ i} \\ R_۱ - R_۲ = r\sqrt{۱ - \cos^۲(\varphi_۱)\sin^۲ i} \end{cases}$$



شکل شماره ی نه

که از آنجا می شود با دانستن نسبت شعاع ها $\left(\alpha := \frac{R_۲}{R_۱}\right)$ که قبلا محاسبه شده است میل مداری را محاسبه کرد. می شود به راحتی به رابطه ی زیر رسید.

$$\boxed{\sin^۲ i = \frac{۴\alpha}{(۱+\alpha)^۲\cos^۲\varphi_۱-(۱-\alpha)^۲\cos^۲\varphi_۲}}$$

برای دوتایی هایی که در آن ها گرفت کامل انجام نمی پذیرد، همانطور که در شکل ۸-ب مشاهده می کنید کمینه ی نمودار تخت نمی شود. که در آن صورت کمینه ی درخشندگی را می توان با محاسبه ی مساحت مشترک در هنگامی که ستارگان کمترین فاصله را دارند بدست آورد.

ه) انتقال جرم در دوتایی ها

در دوتایی هایی که فاصله و شعاع ستارگان به گونه ای است که جرم از یکی از ستارگان به دیگری منتقل می شود تحولات فیزیکی مختلفی هم در مدار دوتایی ها و هم در خود ستارگان صورت می گیرید. در اینجا تنها تحولات مداری را مورد بررسی قرار می دهیم.

در طی انتقال جرمی که صورت می گیرد تکانه ی زاویه ای کل سیستم و مجموع جرم پایسته می ماند بنا بر این می توان نوشت:

$$L = L', L = \frac{m_۱m_۲}{m_۱+m_۲}\sqrt{G(m_۱+m_۲)r} \Longrightarrow m_۱m_۲\sqrt{r} = m'_۱m'_۲\sqrt{r'}$$

اگر فرض کنیم جرم از ستاره ی اول به اندازه یΔm به ستاره ی دوم جابجا شده است. با قبول تقریب هایی خواهیم داشت:

$$m_۱m_۲\sqrt{r} = (m_۱-\Delta m)(m_۲+\Delta m)\sqrt{(r+\Delta r)}$$

$$m_۱m_۲\sqrt{r} = m_۱m_۲\sqrt{r}\left(۱-\frac{\Delta m}{m_۱}\right)\left(۱+\frac{\Delta m}{m_۲}\right)\left(۱+\frac{\Delta r}{۲r}\right) \Longrightarrow \boxed{\frac{\Delta r}{r} = \frac{-۲\Delta m(m_۱-m_۲)}{m_۱m_۲}}$$

می شود با استفاده از قانون دوم کپلر تکانه ی زاویه ای را برحسب تناوب نوشته و با اعمال تقریب هایی تغییرات تناوب را نیز محاسبه کرد که اگر این کار انجام شود به رابطه زیر می انجامد.

$$\boxed{\frac{\Delta p}{p} = \frac{-۳\Delta m(m_۱-m_۲)}{m_۱m_۲}}$$

و) انفجارهای ابرنواختری در ستارگان عضو سیستم های دوتایی

انتقال جرم در دوتایی ها خود می تواند عاملی در امر انفجارهای ابرنواختری ستارگان عضو دوتایی ها باشد. فیزیک این امر چنین می باشد که در اثر این انفجار مقداری جرم از یکی از ستارگان خارج و به سرعت از سیستم دور می شود. این انفجار تاثیرات مستقیمی بر مدار ستارگان می گذارد که در این قسمت قصد بررسی آن را داریم.

فرض کنید انفجار در ستاره ی اول صورت گیرد. در اینصورت انرژی مداریِ قبل انفجار را نسبت به مرکز جرم چنین می توان نوشت.

$$E = \frac{۱}{۲}\frac{m_۱m_۲}{m_۱+m_۲}v^۲ - \frac{Gm_۱m_۲}{r}$$

با فرض دایروی بودن مدار اولیه در لحظه ی انفجار این انرژی چنین می شود:

$$E' = \frac{۱}{۲}\frac{(m_۱-\Delta m)m_۲}{(m_۱-\Delta m)+m_۲}\frac{G(m_۱+m_۲)}{r} - \frac{G(m_۱-\Delta m)m_۲}{r}$$

سرنوشت مدار جدید را انرژی محاسبه شده در بالا تعیین خواهد کرد. به راحتی می توان تحقیق کرد برای اینکه مدار همچنان بسته بماند باید چنین رابطه ای بین جرم از دست رفته در اثر انفجار و جرم های اولیه باشد:

$$\boxed{\Delta m < \frac{m_۱+m_۲}{۲}}$$

بنابراین با معلوم بودن انرژی می شود پارامتر های مدار جدید را محاسبه کرد.

در اثر این انفجار مرکز جرم سیستم دوتایی با سرعت V_{CM} شروع به حرکت می کند که می شود با استفاده از تعریف مرکز جرم مقدار آن را محاسبه کرد.

$$V_{CM} = \frac{(m_۱-\Delta m)v_۱+m_۲v_۲}{(m_۱-\Delta m)+m_۲} = \frac{-\Delta m.v_۱}{(m_۱-\Delta m)+m_۲}$$

$v_۱$ را بر حسب تناوب سیستم دوتایی بدست می آوریم.

$$v_۱ = \frac{۲\pi r_۱}{p} \implies \boxed{v_۱^۳ = \frac{m_۲^۳}{(m_۱+m_۲)^۲}\frac{۲\pi G}{p}}$$

که مقدار $\frac{m_۲^۳}{(m_۱+m_۲)^۲}$ را تابع جرم نیز می نامند. در اینصورت سرعت مرکز جرم به شکل زیر در می آید.

$$\boxed{V_{CM} = \frac{-\Delta m}{(m_۱-\Delta m)+m_۲}\left(\frac{m_۲^۳}{(m_۱+m_۲)^۲}\frac{۲\pi G}{p}\right)^{\frac{۱}{۳}}}$$