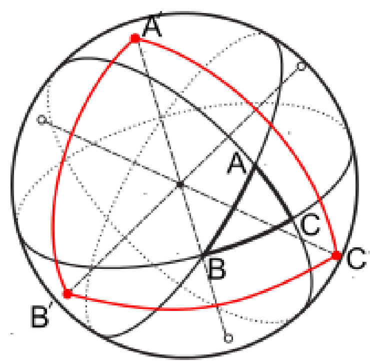
به نام حضرت دوست

درسنامه

هندسه کروی



تهیّه و گردآوری: ارسلان معتمدی

بازبینی و اصلاح: سیّد امیر سادات موسوی

سلام دوستان ؛

همان طور که می دانیم نجوم کروی یکی از بخش های مهم المپیاد نجوم است. این علم شامل دو بخش اصلی، یعنی مثلثات کروی و هندسه کروی است. بخش عمده ای از نجوم کروی که در سوالات و منابع المپیاد نجوم دیده اید مربوط به بخش مثلثات کروی بوده است و به بخش دیگر یعنی هندسه کروی خیلی کمتر پرداخته شده است.

همچنین امسال به همت آقای امیرسادات موسوی، این بحث یعنی هندسه کروی در دوره تابستانه المپیاد نجوم به شکل جدی مطرح شد و در آزمون های پایانی نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. بر این اساس تصمیم گرفتیم درسنامه ای با این عنوان گرد آوری کنیم تا مطالعه ی این مبحثِ تازهِ رونق گرفته را برای شما دوستان راحت تر کنیم.

اکثر بخش های این درس نامه مباحث تدریس شده در کلاس هندسه کروی دوره تابستانه می باشد؛ به همین منظور باز هم جا دارد از جناب آقای امیر سادات موسوی کمال تشکر و سپاس گزاری را داشته باشیم.

و اما نکته ای دیگر در مورد متن درسنامه آن که، بخش هایی که با علامت *** مشخص شده اند جزء مباحث اصلی درسنامه نبوده و صرفا برای تفهیم بیشتر مطرح گردیده اند.

حل بخش هایی که به عنوان مسئله آورده شده اند، مدتی پس از گذاشتن درسنامه بر روی وبلاگ قرار خواهد گرفت.

در پایان تشکر می‌کنم از دوست خوبم آقای وحید احمدی که مرا در نگارش این درسنامه یاری داد.

همچنین اگر با ایراد یا ابهامی در هر جایی از درسنامه روبرو شدید می توانید از طریق ایمیل های زیر با ما در میان بگذارید.

۱۰thioaa@gmail.com

Motamedi۱۷@gmail.com

موفق باشیم ☺

پاییز ۹۴

رابطه سینوس ها:

با استفاده از تشابه، نشان دهید در هندسه ی تخت، اگر در مثلث قائم الزاویه ABC که <BAC=۹۰ از نقطه ای دلخواه واقع بر ضلع AB(که D می‌نامیم) عمودی بر AB خارج کنیم که ضلع BC را در نقطه ی E قطع نماید، رابطه ی زیر برقرار است:

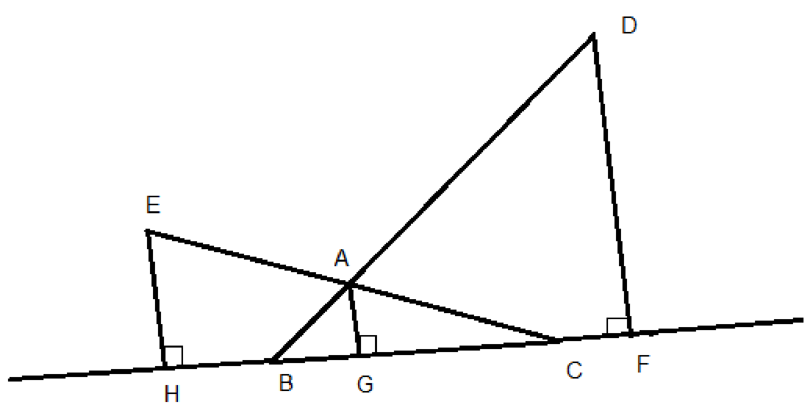
$$\frac{DE}{BE}=\frac{AC}{BC}$$

این بار مثلث کروی ABC را درنظر بگیرید به طوری که <BAC=۹۰. حال از نقطه ی D دلخواه واقع بر دایره عظیمه ی AB دایره عظیمه ای رسم می‌کنیم تا دایره عظیمه ی BC را درE قطع کند و <EDB=۹۰. داریم: (اثبات این مطلب ما را از مباحث المپیاد دور می‌کند. به همین دلیل اثبات این مطلب در پستی جداگانه برای علاقه مندان گذاشته خواهد شد.)

$$\frac{\sin(DE)}{\sin(BE)}=\frac{\sin(AC)}{\sin(BC)} \qquad \text{Eqn.۱}$$

با استفاده از رابطه ی بدست آمده، می‌خواهیم رابطه ی سینوس ها در مثلث مسطحه را بدست آوریم:

مثلث دلخواه ABC مانند شکل مفروض است. اضلاع AB,AC را به اندازه ای امتداد می‌دهیم تا ضلع AC به نقطه ی E برسد به طوری که CE=L. همچنین AB را به اندازه ای امتداد می‌دهیم تا به D برسیم به طوری که BD=L. از نقاط D,A,E به ضلع BC عمودی رسم می‌کنیم که خود BC یا امتداد آن را به ترتیب در نقاط F,G,H قطع کند. برای راحتی AG را h می‌نامیم. (مطابق شکل ۱)



شکل۱

اگر در مثلث BDF رابطه ی ۱ را به کار ببریم:

$$\frac{AB}{h}=\frac{L}{DF}=\frac{۱}{\sin(B)}$$

با به کار بردن این رابطه برای مثلث CEH داریم:

$$\frac{CA}{h}=\frac{L}{EH}=\frac{۱}{\sin(C)}$$

با استفاده از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم:

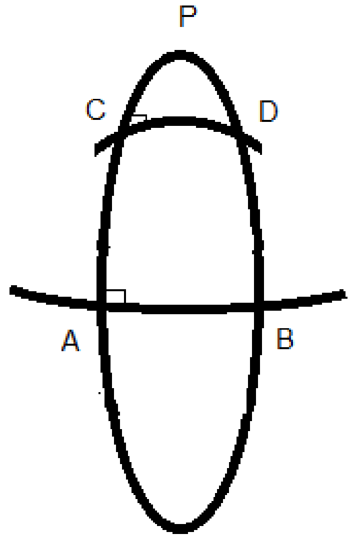
$$\frac{AB}{\sin(C)}=\frac{CA}{\sin(B)}$$

(راه ساده تری نیز برای اثبات سینوس ها در مثلث مسطحه وجود دارد اما برای درک بهترِ اثبات رابطه سینوس ها در مثلث کروی ، اثبات بالا را به این شکل نوشته ایم.)

حال با روشی مشابه، دو اثبات برای رابطه ی سینوس ها در مثلث کروی می‌نویسیم که کمی با هم تفاوت دارند:

راه اول) مثلث کروی دلخواه ABC را درنظر بگیرید(شکل۳). دایره عظیمه های AB,AC را به اندازه ای امتداد می‌دهیم که به نقاط D,E برسیم؛ به طوری که BD=CE=۹۰. از A دایره عظیمه ای رسم می‌کنیم که بر BC عمود باشد و آن را در F قطع نماید. همچنین از D واقع بر AB، دایره عظیمه ای عمود بر AB رسم می کنیم تا دایره عظیمه ی گذرنده از B,C را در G قطع کند و هم از E دایره عظیمه ای عمود بر AC رسم می‌کنیم تا دایره عظیمه ی گذرنده از B,C را در H قطع کند.

*** ابتدا اثبات می‌کنیم که اگر نقطه ای مانند P از یکی از نقاط دایره عظیمه ی O به نام A به فاصله ی ۹۰ درجه باشد، و نقطه ی دیگری نیز مانند B بر روی دایره عظیمه ی O وجود داشته باشد به طوری که ۹۰=PAB>، آنگاه ۹۰=PB و در نتیجه P قطب O است. (نقاط A,B در این اثبات با نقاط A,B معرفی شده در راه اول اثبات سینوس ها متفاوتند و ربطی به هم ندارند.)



شکل۲

مطابق شکل ۲، از P به A,B وصل می‌کنیم. همچنین از نقطه ی C روی دایره عظیمه ی PA در نزدیکی P، دایره عظیمه ای عمود بر PA رسم می‌کنیم تا PB را در D قطع نماید. طبق معادله ی ۱ داریم:

$$\frac{\sin(PD)}{\sin(CD)} = \frac{\sin(PB)}{\sin(AB)}$$

از طرفی چون سه نقطه ی P,C,D، را نزدیک به هم اختیار کرده ایم، می‌توانیم مثلث PCD را مثلث تخت درنظر بگیریم. پس داریم:

$$\sin(PD) \approx PD$$

$$\sin(CD) \approx CD$$

و خواهیم داشت:

$$\frac{\sin(PD)}{\sin(CD)} \approx \frac{PD}{CD}$$

حال اگر زاویه ی APB> را α بنامیم(با تقریب مسطح بودن مثلث PCD)، داریم:

$$\frac{CD}{PD} = \sin\alpha$$

سپس با استفاده از نتایج بدست آمده:

$$\sin\alpha = \frac{\sin(AB)}{\sin(PB)} \qquad \text{Eqn.۵}$$

این معادله، معادله ی مهمی است که در ادامه، چندین بار از آن استفاده می‌کنیم.

حال اگر از نقطه ای دیگر روی دایره عظیمه ی PB (که نزدیک به B باشد)، بر AB عمودی رسم نماییم. دوباره با استفاده از روش بالا به رابطه ی خوبی می‌رسیم که به صورت زیر خواهد بود: ($\theta =< PBA$)

$$\frac{\sin(PA)}{\sin(PB)} = \sin\theta$$

و می‌دانیم PA=۹۰ ، پس:

$$\sin\theta = \frac{۱}{\sin(PB)} \qquad \text{Eqn.۲}$$

می‌دانیم $PB < \pi$,$۰ < \theta < \pi, ۰ <$، پس $۰ < \sin PB < ۱$, $۰ < \sin\theta < ۱$، با این اوصاف و معادله ی ۲ نتیجه می‌شود: $PB = \theta = \frac{\pi}{۲}$. پس نتیجه گرفتیم که P و B هم با یک‌دیگر ۹۰ درجه فاصله داشته و P قطب O است. همچنین معادله ی ۵ به صورت ساده ی زیر در می‌آید:

$$AB = \alpha$$

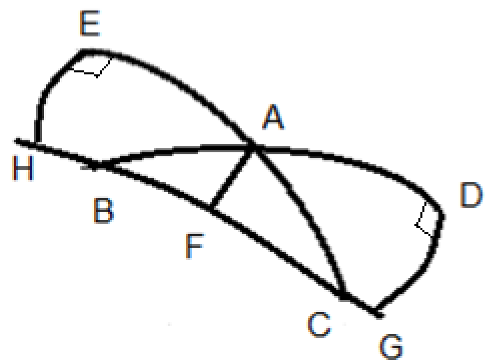
مسئله۱: مثلث قطبی *APB* را رسم کنید، و مانند روش بالا، نتیجه بگیرید که *P* قطب *O* است.

حال باز می‌گردیم به اثبات رابطه ی سینوس ها! اثبات این مطلب به این منظور بود که نشان دهیم در مساله ی معرفی شده، B قطب دایره عظیمه ی گذرنده از D,G است. همچنین C قطب دایره عظیمه ی گذرنده از E,H است. پس اگر $ACB >$ را α و $ABC >$ راβ بنامیم ، آنگاه $DG = \beta$ و $EH = \alpha$ است (مطابق شکل ۳). اگر معادله ی ۱ را در مثلث BDG بکار ببریم:

$$\frac{\sin(BA)}{۱} = \frac{\sin(AF)}{\sin\beta}$$

و با به کار بردن این رابطه در مثلث کروی CEH:

$$\frac{\sin(CA)}{۱} = \frac{\sin(AF)}{\sin\alpha}$$



شکل۳

حال با ترکیب دو معادله ی فوق داریم:

$$\frac{\sin(BA)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(CA)}{\sin(\beta)}$$

که همان رابطه ی سینوس های معروف است.

راه دوم) مثلث کروی ABC را درنظر بگیرید. دایره عظیمه ی AB,AC را از طرف A به اندازه ای امتداد می دهیم که به نقاط D,E برسیم. به طوری که BD=CE=۹۰است. از A,D,E بر دایره عظیمه ی گذرنده از B,C عمودی رسم می‌کنیم که آن را به ترتیب در F,G,H قطع نمایند.(مطابق شکل۵)

*** مانند قبلی می‌خواهیم اثبات کنیم EH=<ACB و DG=<ABCاست. برای این کار روشی مانند روش بالا را به کار می‌بریم. نقطه ای مانند P داریم که فاصله زاویه آن از نقطه ی A (که بر روی دایره عظیمه ی O قرار دارد)۹۰ درجه بوده و نقطه ی دیگری به نام B بر روی O وجود دارد که دایره عظیمه ی PB بر O عمود است. (باز هم تاکید می کنیم که نقاط A,B در این اثبات با نقاط A,B معرفی شده در راه دوم اثبات سینوس ها متفاوتند و ربطی به هم ندارند.)

مطابق شکل ۴ از P به A,B وصل می کنیم. از نقطه ی D روی دایره عظیمه ی PB، دایره عظیمه ای عمود بر PB رسم می‌کنیم تا PA را در C قطع کند.

با استفاده از معادله ی ۱ می‌نویسیم:

$$\frac{\sin(PC)}{\sin(CD)} = \frac{\sin(PA)}{\sin(AB)}$$

از طرفی چون سه نقطه ی P,C,D، نزدیک به هم اختیار شده اند، می توانیم مثلث PCD را مثلث تخت درنظر بگیریم. پس داریم:

$$\sin(PC) \approx PC$$

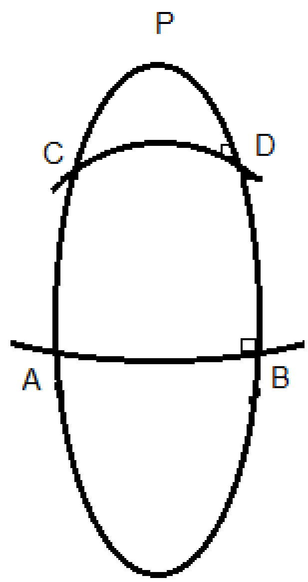
$$\sin(CD) \approx CD$$

سپس خواهیم داشت:

$$\frac{\sin(PC)}{\sin(CD)} \approx \frac{PC}{CD}$$

حال زاویه ی APB> را α می‌نامیم (با تقریب مسطح بودن مثلث PCD):

$$\frac{CD}{PC} = \sin\alpha$$



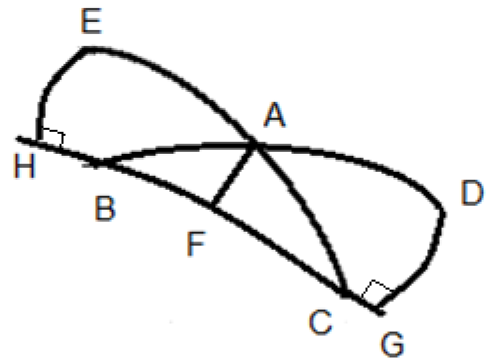
شکل٤

پس می‌نویسیم :

$$\sin\alpha = \frac{\sin(AB)}{\sin(PA)}$$

چون می‌دانیم که PA=۹۰ نتیجه می‌گیریم که AB=α است.

با توجه به مطلب بالا ادامه اثبات رابطه سینوس ها در مثلث کروی با راه دوم که مشابه راه اول است، به خواننده واگذار می‌شود.



شکل۵

مسئله۲: اگر در یک مثلث تخت ، مقابل ضلعی به طول a زاویه ای به اندازه ی α باشد و مقابل ضلعی به طول b زاویه ای به اندازه ی β باشد، نشان دهید رابطه ی زیر برقرار است:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan(\frac{\alpha-\beta}{۲})}{\tan(\frac{\alpha+\beta}{۲})}$$

مسئله۳: الف . اگر در یک مثلث کروی، مقابل ضلعی به طول a زاویه ای به اندازه ی α باشد و مقابل ضلعی به طول b زاویه ای به اندازه ی β باشد، نشان دهید رابطه ی زیر برقرار است:

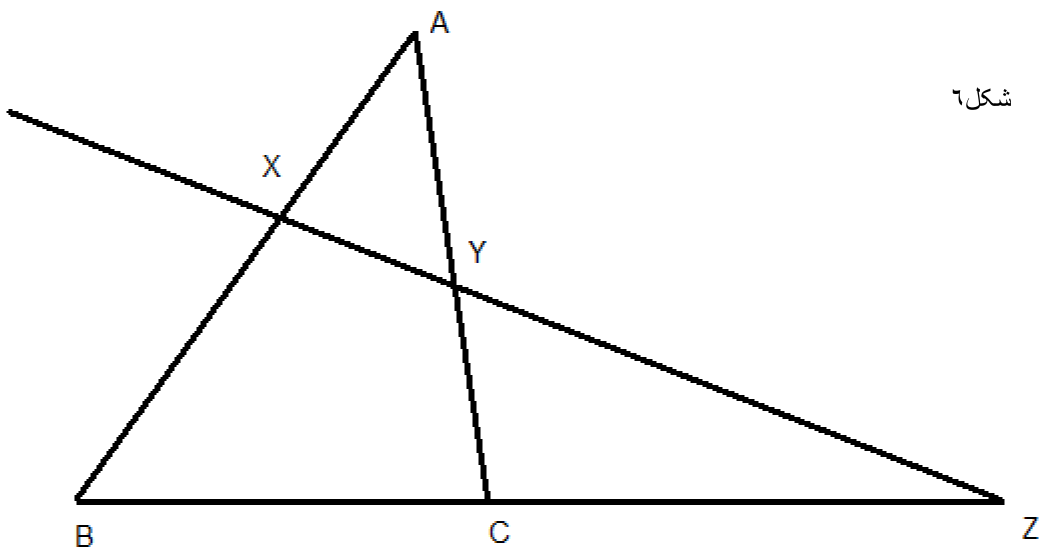
$$\frac{\tan(\frac{a+b}{۲})}{\tan(\frac{a-b}{۲})}=\frac{\tan(\frac{\alpha+\beta}{۲})}{\tan(\frac{\alpha-\beta}{۲})}$$

ب. نشان دهید این رابطه در حد $a\to ۰, b\to ۰$ همان رابطه ی مثال قبل می‌شود.

قضیه ی همخطی در مثلث مسطحه:

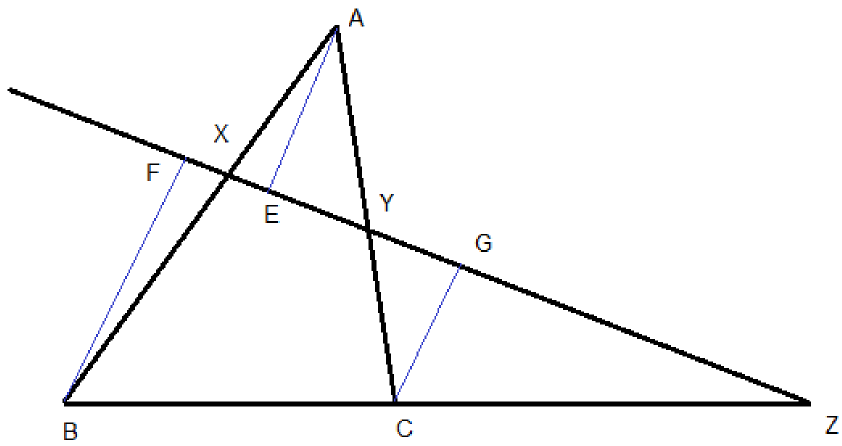
قضیه منلائوس در هندسه تخت: اگر در مثلث دلخواه ABC بر امتداد ضلع BC نقطه ی Z را انتخاب کنیم و خطی از Z رسم کنیم تا اضلاع AC,AB را به ترتیب در Y,X قطع کند؛ آنگاه داریم:

$$\frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{CZ} \times \frac{CY}{AY} = ۱$$



شکل٦

اثبات: مطابق شکل از نقاط A,B,C بر خط گذرنده از X,Y,Z عمود می‌کنیم.



با استفاده از تشابه مثلث های AEX و BFX داریم:

$$\frac{AX}{BX}=\frac{AE}{BF}$$

همچنین از تشابه دو مثلث AEY و CGY داریم:

$$\frac{CY}{AY}=\frac{CG}{AE}$$

و از تشابه ZCG و ZBF:

$$\frac{BZ}{CZ}=\frac{BF}{CG}$$

حال اگر سه معادله را در هم ضرب کنیم، به معادله زیر که همان قضیه ی منلائوس می‌باشد می‌رسیم:

$$\frac{AX}{XB}\times\frac{BZ}{CZ}\times\frac{CY}{AY}=۱$$

مسئله۴: قضیه ی منلائوس را با استفاده از رابطه ی سینوس ها اثبات کنید. (راهنمایی: $\sin X=\sin(\pi-X)$)

عکس قضیه ی منلائوس نیز برقرار است.

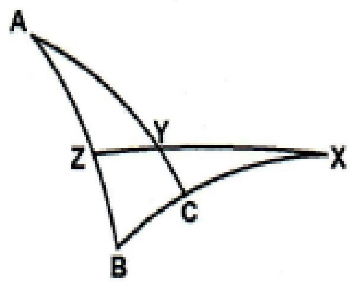
عکس قضیه منلائوس: اگر نقاط X,Y,Z به ترتیب بر روی اضلاع یا امتداد اضلاع AB,AC,BC واقع باشند و رابطه ی زیر برقرار باشد، X,Y,Z بر یک خط واقعند.

$$\frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{CZ} \times \frac{CY}{AY} = ۱$$

مسئله۵: عکس قضیه ی منلائوس را اثبات کنید.

قضیه هم خطی در مثلث کروی(رابطه ی قطاع): اگر در مثلث کروی ABC، نقطه ی X را بر روی امتداد دایره عظیمه ی BC انتخاب کنیم و از X دایره عظیمه ای رسم کنیم تا AC,AB را به ترتیب در Y,Z قطع کند، داریم:

$$\frac{\sin AZ}{\sin BZ} \times \frac{\sin BX}{\sin CX} \times \frac{\sin CY}{\sin AY} = ۱$$

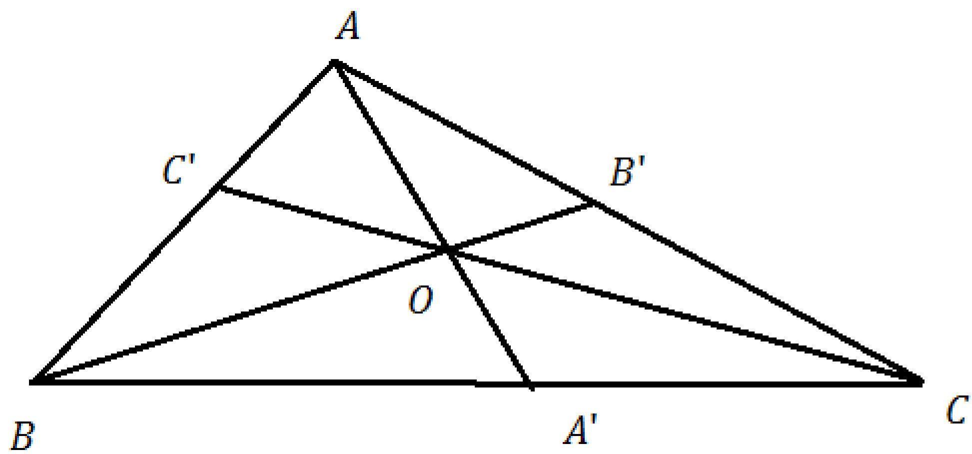


شکل۷

عکس قضیه ی بالا هم برقرار است.

قضیه همخطی در مثلث مسطحه: (این قضیه به قضیه ی سوا معروف است اما در واقع چند قرن قبل از سوا توسط شخص دیگری به نام المؤتمن ابن هود وضع شده بود) این قضیه را به دو صورت زیر می‌توان بیان کرد:

۱) نقطه ی O را داخل مثلث ABC انتخاب می کنیم و از A به این نقطه وصل می کنیم و امتداد می‌دهیم تا BC را در 'A قطع کند . همچنین از B به این نقطه وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا AC را در 'B قطع کند و همین طور از C به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا AB را در 'C قطع کند. داریم:



$$\frac{A'B}{A'C}\times\frac{B'C}{AB'}\times\frac{AC'}{C'B}=۱$$

اثبات قضیه بالا: اگر طول ارتفاع رسم شده از A به BC را با h نمایش دهیم:

$$\text{مساحت}\ AA'B'=\frac{۱}{۲}\times(A'B)\times h$$

$$\text{مساحت}\ AA'C=\frac{۱}{۲}\times(AC')\times h$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\text{مساحت}\ AA'B}{\text{مساحت}\ AA'C}=\frac{A'B}{A'C}$$

و به همین ترتیب می‌نویسیم:

$$\frac{\text{مساحت}\ BOA'}{\text{مساحت}\ COA'}=\frac{A'B}{A'C}$$

از طرفی می‌دانیم که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ باشد ، آنگاه $k=\frac{a-c}{b-d}$ است. پس می‌نویسیم:

$$\frac{AOC \text{ مساحت}}{AOB \text{ مساحت}} = \frac{A'B}{A'C}$$

به روشی مشابه اثبات می‌شود که:

$$\frac{BOC \text{ مساحت}}{BOA \text{ مساحت}} = \frac{B'C}{AB'}$$

$$\frac{COA \text{ مساحت}}{COB \text{ مساحت}} = \frac{AC'}{C'B}$$

حال اگر این سه عبارت اخیر را در هم ضرب کنیم، در سمت چپ معادله صورت و مخرج ها با هم ساده می شوند و به این ترتیب به حکم مساله می رسیم.

۲) نقطه ی O را داخل مثلث ABC انتخاب می کنیم و از A به این نقطه وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا BC را در 'A قطع کند . همچنین از B به این نقطه وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا AC را در 'B قطع کند و همین طور از C به O وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا AB را در 'C قطع کند. داریم:

$$\frac{\sin(A'AC)}{\sin(A'AB)} \times \frac{\sin(B'BA)}{\sin(B'BC)} \times \frac{\sin(C'CB)}{\sin(C'CA)} = ۱$$

مسئله۶: بیان دوم قضیه ی سوا را با استفاده از رابطه ی سینوس ها اثبات کنید.

مسئله۷: اگر در مثلث ABC برای سه خط سوائی AX,BY,CZ داشته باشیم:

$$\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{AY} = ۱$$

آنگاه سه خط مزبور همرسند.

قضیه ی همرسی در هندسه کروی: نقطه ی O را داخل مثلث کروی ABC درنظر بگیرید. از A و O، دایره عظیمه ای عبور می دهیم تا دایره عظیمه ی واصل BوC را در 'A قطع کند. همچنین از B و O دایره عظیمه ای می گذرانیم تا دایره عظیمه ی واصل A,C را در 'B قطع کند. و به همین شکل از C و O دایره عظیمه ای عبور می دهیم تا دایره عظیمه ی واصل AوB را در 'C قطع کند. سپس داریم:

$$\frac{\sin(A'AC)}{\sin(A'AB)} \times \frac{\sin(B'BA)}{\sin(B'BC)} \times \frac{\sin(C'CB)}{\sin(C'CA)} = ۱$$

(اثبات این قضیه بسیار شبیه به بیان دوم نوشته شده برای قضیه ی همرسی در هندسه ی تحت است. به همین دلیل، اثبات این قضیه هم به خواننده واگذار می گردد.) (عکس قضیه ی فوق هم برقرار است.)

مسئله۸: یکبار بدون استفاده از قضیه ی همخطی در مثلث کروی و یکبار با استفاده از این قضیه، همرسی نیمساز ها در مثلث کروی را اثبات کنید.

مسئله۹: با استفاده از قضیه ی همخطی در مثلث کروی، همرسی میانه ها را ثابت کنید.

مسئله۱۰: ثابت کنید عمود منصف ها در مثلث کروی همرسند.

مسئله۱۱ : الف) نشان دهید ارتفاع ها در مثلث کروی همرسند.

ب) در چه شرایطی این همرسی برقرار نیست؟(قسمت های الف و ب سوال امتحان نهایی یازدهمین دوره ی تابستانه ی المپیاد نجوم است)

پ) برای مثلث دلخواه ABC، مثلث قطبی DEF ، را رسم می کنیم.(D قطب BC ، E قطب AC و F قطب AB است). دایره عظیمه های AB,DE همدیگر را در G، دایره عظیمه های DF,AC همدیگر را در H و دایره عظیمه های FE,BC همدیگر را در I قطع می کنند. نشان دهید G,H,I هر سه روی یک دایره عظیمه قرار دارند.