آشنایی مقدماتی با نسبیت عام

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Einstein's original equation

Law of an expanding universe — All matter and energy in the universe

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Law of an expanding universe — Cosmological constant — All matter and energy in the universe

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \bar{\rho}_{DE}\, g_{\mu\nu})$$

Law of an expanding universe — All matter and energy in the universe

تهیه کننده

دکتر حسین مصحفی

www.icosmo.ir

فهرست مطالب

فصل ۱

آشنایی با نسبیت عام

۱.۱ فضا-زمان تخت

متریک فضا-زمان مینکوفسکی به صورت زیر است

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\vec{x}^2. \qquad (۱.۱)$$

تانسور متریک مینکوفسکی به قرار زیر است

$$||\eta_{\mu\nu}|| = \mathrm{Diag}\,(1, -1, -1, -1)\,. \qquad (۲.۱)$$

متریک تحت تبدیلات هذلولوی زیر ناوردا است:

$$\begin{aligned} t' &= t\cosh\alpha + x\sinh\alpha, \\ x' &= t\sinh\alpha + x\cosh\alpha, \\ \alpha = const, \quad y' &= y, \quad z' = z, \end{aligned} \qquad (۳.۱)$$

به عبارت دیگر $\eta_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu = (dt')^2 - (d\vec{x}')^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$.

این تبدیل انتقال لورنتز نامیده‌شود، که در آن تعریف کرده‌ایم $\cosh\alpha = \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ،$\sinh\alpha = v\,\gamma$. معنای فیزیکی آن تبدیل از یک دستگاه مرجعِ لَخت به دستگاه مرجعِ لَخت دیگر است. دستگاه دوم در امتداد محور x با سرعت ثابت v نسبت به چارچوب لخت مرجع حرکت می‌کند.

اما تحت یک تبدیل مختصات دلخواه (نه الزاما خطی) ، $x^\mu = x^\mu\,(\bar{x}^\nu)$، متریک می‌تواند به شکل غیر

قابل شناسایی تغییر کند، اگر به عنوان یک تانسور مرتبه دوم تبدیل شود:

$$g_{\alpha\beta}\left(\bar{x}\right)=\eta_{\mu\nu}\,\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\bar{x}^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\bar{x}^{\beta}}. \tag{۴.۱}$$

اما این مهم است که توجه کنیم که پیامد این تبدیل متریک این است که بازه فضا زمان تحت چنین تبدیل مختصاتی تغییر نمی‌کند

$$ds^{2}=\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}=g_{\alpha\beta}\left(\bar{x}\right)d\bar{x}^{\alpha}d\bar{x}^{\beta}. \tag{۵.۱}$$

در حقیقت، انتظار داشتیم که اگر یک فضا-زمان داریم، فاصله‌ی بین دو نقطه وابسته به مسیری که در شبکه مختصات می‌کشیم نباشد. همچنین طبیعی است که قوانین فیزیک نباید به انتخاب دستگاه مختصات در فضا-زمان بستگی داشته باشند. این اصل هموردایی عام است که پایه‌ی نظریه نسبیت عام است.

تبدیلات مختصات در فضا-زمان مینکوفسکی به معنای گذار بین دو دستگاه مرجعِ لخت هستند. بنابراین، معنای یک تبدیل مختصه دلخواه چیست؟ برای پاسخ به این سوال اجازه دهید با گذار بین دو دستگاه مرجع نالخت در فضا-زمان مینکوفسکی شروع کنیم.

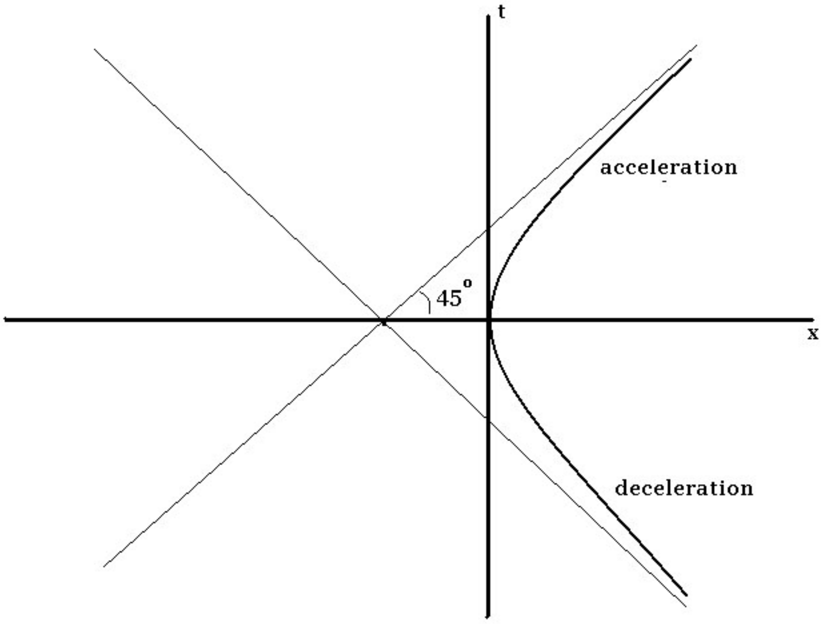
ساده‌ترین حرکت نالخت حرکت با یک شتاب ثابت خطی است. در وضعیت نسبیتی، سه شتاب نمی‌توانند ثابت باشند. بنابراین، باید حرکت یک ذره با چهار-شتاب ثابت را در نظر گیریم، $w^{\mu}\,w_{\mu}=-a^{2}=const$، که $w^{\mu}=d^{2}z^{\mu}(s)/ds^{2}$، و $z^{\mu}(s)=[z^{0}(s),\vec{z}(s)]$ جهان-خط ذره است که بر حسب ویژه زمان پارامتربندی شده است. بیایید چارچوب مرجع فضایی را چنان انتخاب کنیم که شتاب در امتداد هر محور مختصات بیافتد. بنابراین داریم

$$\left(\frac{d^{2}z^{0}}{ds^{2}}\right)^{2}-\left(\frac{d^{2}z^{1}}{ds^{2}}\right)^{2}=-a^{2}. \tag{۶.۱}$$

پس، مؤلفه‌های چهار-شتاب یک هذلولی را درست می‌کنند. پس، حل استاندارد این معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$z^{0}(s)=\frac{1}{a}\,\sinh(a\,s),\quad z^{1}(s)=\frac{1}{a}\left[\cosh(a\,s)-1\right]. \tag{۷.۱}$$

ثابت انتگرال $z^{1}(s)$ است.



شکل ۱.۱: برشی از فضا–زمان

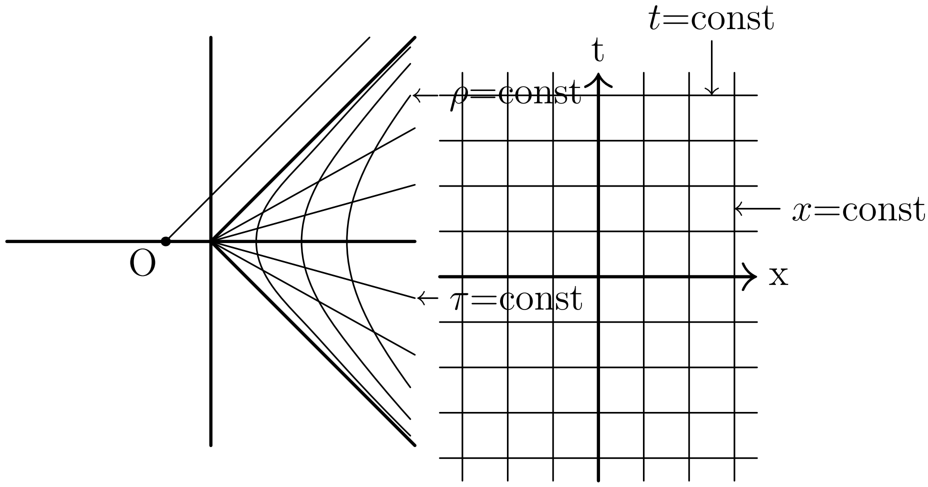
بنابراین، رابطه زیر بین z^1 و z^0 برقرار است:

$$\left(z^1 + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(z^0\right)^2 = \frac{1}{a^2}. \qquad (۸.۱)$$

به عبارت دیگر، جهان–خط یک ذرا که با شتاب ابدی ثابتی حرکت می‌کند فقط یک هذلولی است. دقت کنید که بخش سه–بعدی شتاب همیشه در امتداد جهت مثبت محور x است: $d^2z^1/(dz^0)^2 = \frac{a}{\cosh(a\,s)}\,\left[1 - \tanh^2(a\,s)\right] > 0$. پس، برای مقادیر منفی s ، ذره واقعا در حال کند شدن است، در حالی که برای مقدار مثبت s در حال شتاب مثبت گرفتن است. مجانب‌های هذلولی خطوط نور–گونه هستند، $z^1 = \pm z^0 - 1/a$. بنابراین، حتی اگر با شتاب ثابت ابدی حرکت کنیم، نمی‌توان از سرعت نور فراتر رفت، چرا که حرکت با سرعت نور در امتداد یکی از مجانبذهای هذلولی خواهد بود.

به علاوه، برای مقادیر کوچک $a\,z^0$، از شکل رابطه‌ی (۸.۱) داریم: $z^1 \approx a\left(z^0\right)^2/2$. در واقع، برای ویژه زمان‌های کوچک، $a\,s \ll 1$، داریم $z^0 \approx s$، $v \approx dz^1/ds \approx a\,z^0 \ll 1$ و و شتاب استاندارد غیر نسبیتی را بدست می‌آوریم، که به شکل (۸.۱) تغییر می‌یابد وقتی ذره به اندازه کافی سرعت بگیرد. باید تاکید کنیم که شتاب ثابت ابدی از نظر فیزیکی غیر ممکن است چرا که انرژی بی‌نهایت نیاز دارد.

این مشاهدات به ما اجازه می‌دهند که دستگاه مختصات مناسبی برای ناظر شتاب‌دار بیابیم که در آن هر لحظه از زمان ویژه را نمی‌تواند از دیگری تمیز دهد. بنابراین، طبیعی ست که انتظار داشته باشیم باید یک چارچوب مرجع ایستا برای هر ناظر شتاب‌دار وجود داشته باشد. با الهام از رابطه‌ی (۷.۱)، تغییرات مختصات



شکل ۲.۱:

زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

$$t = \rho\,\sinh\tau, \quad x = \rho\,\cosh\tau, \quad \rho \geq 0,$$
$$y' = y, \quad \text{and} \quad z' = z. \qquad (۹.۱)$$

دقت نمایید که این مختصات تنها یک چهارم کل فضا-زمان مینکوفسکی را پوشش می‌دهند. یعنی ربع راست را. در واقع، چون $\cosh\tau \geq |\sinh\tau|$، داریم $x \geq |t|$.

تحت چنین تغییر مختصاتی داریم:

$$dt = d\rho\,\sinh\tau + \rho\,d\tau\,\cosh\tau, \quad dx = d\rho\,\cosh\tau + \rho\,d\tau\,\sinh\tau. \qquad (۱۰.۱)$$

پس $dt^2 - dx^2 = \rho^2\,d\tau^2 - d\rho^2$ و :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \rho^2\,d\tau^2 - d\rho^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (۱۱.۱)$$

که متریک ریندلر نامیده می‌شود. این ثابت نیست، $||g_{\mu\nu}|| = Diag(\rho^2, -1, -1, -1)$، بلکه وابسته به زمان است و قطری است.

در این متریک، ترازهای زمان ثابت τ، خطوط مستقیمی هستند $t/x = \tanh\tau$ در صفحه‌ی $x - t$ (یا صفحات سه بعدی تختی در کل فضای مینکوفسکی). ترازهای ρ ثابت، هذلولی‌هایی $x^2 - t^2 = \rho^2$ در صفحه‌ی $x - t$ هستند. دومی متناظر با جهان‌خط ناظرهایی است که با ۴-شتاب ثابت برابر با $1/\rho$ روی یک برش از مختصات ثابت y و z حرکت می‌کنند. هذلولی‌ها با خطوط نورگونه $x = \pm t$ وقتی $\rho \to 0$ تبهگنی دارند.

این‌ها مجانب‌های هذلولی برای تمام مقادیر ρ هستند. وقتی ρ را نزدیک و نزدیک‌تر به صفر در نظر می‌گیریم هذلولی متناظر به مجانب‌هایش نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. وقتی $\tau = -\infty$ باشد متناظر با $x = -t$ است و وقتی $\tau = +\infty$ متناظر با $x = t$. در نتیجه تغییر شبکه مختصات را داریم، که در شکل (۲.۱) نشان داده شده است.

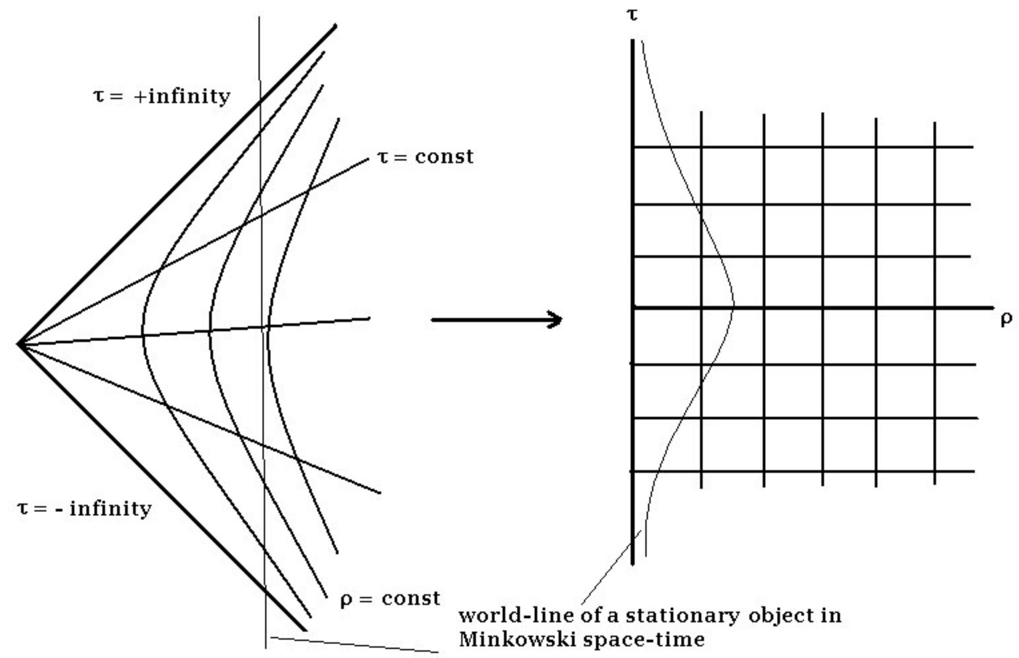
ویژگی مهم متریک ریندلر (۱۱.۱) این است که در $\rho = 0$ تبهگن است. این به **تکینگی مختصه** معروف است. این امر مشابه تکینگی موجود در مختصات قطعبی $dr^2 + r^2d\varphi^2$ در $r = 0$ است. خود فضا–زمان در $\rho = 0$ معین است. فضا–زمان فقط یک فضای تخت مینکوفسکی در خطوط نورگونه‌ی $x = \pm t$ است. دیگر ویژگی مهم متریک ریندلر این است که سرعت نور وابسته به مختصات است:

$$ds^2 = 0, \qquad \left|\frac{d\rho}{d\tau}\right| = \rho, \qquad dy = dz = 0. \tag{۱۲.۱}$$

هم زمان، در مختصات ویژه سرعت نور دقیقا برابر با یک است $d\rho/ds = d\rho/\rho d\tau = 1$. به علاوه، وقتی $\rho \to 0$ می‌رود، سرعت نور، $d\rho/d\tau$، صفر می‌شود. این پدیده به این واقعیت مربوط است که اگر یک ناظر یک شتاب پیوسته با $a = 1/\rho$ آغاز کند، مثلا در لحظه‌ی $\tau = 0 = t$، پس یک ناحیه در فضا–زمان مینکوفسکی وجود دارد که پرتوهای نور نمی‌توانند به آن برسند. در واقع، همان‌طور که در شکل (۲.۱) نشان داده شده است اگر یک پرتوی نور از یک نقطه‌ی O منتشر شود با مجانب $x = t$ جهان خط ناظر موازی خواهد بود. در نتیجه، پرتوی نور هرگز هذلولی را قطع نمی‌کند، به بیان دیگر، هرگز ناظر با شتاب پیوسته را نمی‌گیرد. این‌ها دلایل این هستند که چرا نمی‌توان متریک ریندلر را فراتر از خطوط نورگونه $x = \pm t$ گسترش داد. سطوح سه بعدی $x = t$ از کل فضا–زمان مینکوفسکی به عنوان **افق رویداد آینده**‌ی ناظران ریندلر تصور می‌شوند. بطور هم‌زمان خط $x = -t$ **افق رویداد گذشته**‌ی ناظرهای ریندلر است.

دقت نمایید که اگر یک ناظر طی زمان محدودی شتاب بگیرد، پس از لحظه‌ای که شتاب خاموش شود، جهان‌خطِ ناظر یک خط مستقیم خواهد بود، که مماس با هذلولی متناظر است. (یعنی ناظر با سرعت کسب شده به حرکت ادامه خواهد داد.) زاویه‌ای که این خط مماس با محور زمان مینکوفسکی می‌سازد کمتر از 45^o است. بنابراین، دیر یا زود پرتوی نور منتشر شده از یک نقطه O به چنین ناظری در واقع خواهد رسید. یعنی ناظر یک افق رویداد ندارد.

دیگر پدیده‌ی جالب توجهی که توسط ناظر ریندلر دیده می‌شود این است که در شکل (۳.۱) نشان داده شده است. یک جسم پایا، $x = const$، در فضا–زمان مینکوفسکی نمی‌تواند از افق رویدادِ ناظرهای ریندلر طی زمان محدود عبور کند. این جسم کند می‌شود و بطور مجانبی به افق نزدیک می‌شود. دقت کنید که وقتی $\rho \to 0$ یک بخش ثابت مشخص از ویژه زمان، $ds = \rho d\tau$، متناظر با بخش‌های افزایش یابنده‌ی مختصه زمان $d\tau$ است.



شکل ۳.۱:

همه‌ی این ویژگی‌های متریک ریندلر هزینه‌ی در نظر گرفتن شتاب ابدی از نظر فیزیکی غیر ممکن است که باید پرداخت. اما، اگر شخصی به دستگاه مرجعی منتقل شود که ناظرهایی که با شتاب‌هایی که فقط طی زمان محدود می‌گیرند در آن قرار دارند، پس یک متریک غیر پایا به واسطه‌ی ناهمگنی چنین حرکتی بدست خواهد آورد.

معنای فیزیکی یک تبدیل مختصه‌ی عام که فضا و زمان را با هم می‌آمیزد گذار به دیگر دستگاهِ نه لزوما لخت، است. در این حالت خم‌های متناظر با مختصات فضایی ثابت ($d\rho = dy = dz = 0$) جهان‌خط‌هایی از ناظرهای لخت هستند. در نتیجه، لزوم هموردایی عام این است که قوانین فیزیکی، در یک فرمول‌بندی مناسب، نباید وابسته با انتخاب ناظرها باشند.

اگر حتی در فضا-زمانِ تخت بتوان مختصات خمیده انتخاب کرد و یک تانسور متریک غیر بدیهی $g_{\mu\nu}(x)$ بدست آورد، چطور می‌توان بین فضا-زمان تخت از فضا-زمان خمیده تمایز قائل شد؟ به علاوه، چون فیزیک پشت مختصات خمیده را فهمیدیم، در فضا زمان تخت، طبیعی خواهد بود که بپرسیم: فیزیک پشت فضا-زمان‌های خمیده چیست؟

بیایید یک ذره‌ی آزاد که در یک فضا-زمان با متریک $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu$ حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. بیایید جهان‌خط این ذره را با اصل کمینه‌ی کنش بیابیم. اگر جهان‌خط $z^\mu(\tau)$ را که با پارامتر τ پارامتربندی شده است، پساده‌ترین مشخصه ناوردا است که می‌توان به طول آن جهان‌خط مرتبط کرد. بنابراین، کنش طبیعی برای ذره‌ی آزاد باید متناسب با طول آن جهان‌خط باشد. دلیل این‌که چرا به دنبال یک کنش ناوردا هستیم این است که انتظار داریم معادلات متناظرِ حرکت هموردا باشند، طبق اصل هموردایی عام.

اگر جهان‌خط را با یک خط شکسته شامل یک زنجیره از بازه‌های کوچک تخمین بزنیم، پس طول آن با عبارت زیر تخمین زده خواهد شد:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{g_{\mu\nu}\left[z_i\right]\ \left[z_{i+1}-z_i\right]^{\mu}\ \left[z_{i+1}-z_i\right]^{\nu}}, \qquad (۱۳.۱)$$

که از تعریف متریک تبعیت می‌کند. در حد $N \to \infty$ و $|z_{i+1}-z_i| \to 0$ جمع تبدیل به انتگرال می‌شود. در نتیجه، کنش به شکل زیر در می‌آید:

$$S = -m \int_1^2 ds = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}\left[z(\tau)\right]\ \dot{z}^{\mu}\ \dot{z}^{\nu}}. \qquad (۱۴.۱)$$

در این‌جا $\dot{z} = dz/d\tau$ است. ضریب تناسب بین کنش، S و طول، L ، منفی جرم ذره است m . این ضریب از مکملیت ناشی می‌شود- از این واقعیت که وقتی $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ است، کنش استاندارد را برای ذرات نسبیتی در نسبیت خاص بدست می‌آوریم.

دقت کنید که کنش (۱۴.۱) تحت تبدیل مختصات $z^{\mu} \to \bar{z}^{\mu}(z)$ ناوردا است، و همچنین تحت باز پارامتربندی، $\tau \to f(\tau)$، اگر ترتیب نقاط در امتداد جهان خط رعایت شود، $df/d\tau \geq 0$. در واقع:

$$d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dz^{\mu}}{d\tau}\ \frac{dz^{\nu}}{d\tau}} = df \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dz^{\mu}}{df}\ \frac{dz^{\nu}}{df}}.$$

حال بیایید معادلات حرکتی که از اصل کمترین کنش اعمال شده در (۱۴.۱) تبعیت می‌کنند را بیابیم. وردش اول کنش می‌شود:

$$\delta S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \frac{\delta\left[g_{\mu\nu}(z)\ \dot{z}^{\mu}\ \dot{z}^{\nu}\right]}{2\sqrt{\dot{z}^2}} =$$
$$= -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau\ \sqrt{\dot{z}^2}}{2\sqrt{\dot{z}^2}\ \sqrt{\dot{z}^2}}\ \left[\delta g_{\mu\nu}(z)\ \ \dot{z}^{\mu}\ \dot{z}^{\nu} + g_{\mu\nu}(z)\,\delta\dot{z}^{\mu}\ \dot{z}^{\nu} + g_{\mu\nu}(z)\ \dot{z}^{\mu}\ \delta\dot{z}^{\nu}\right]. \qquad (۱۵.۱)$$

در این‌جا $\dot{z}^2 \equiv g_{\alpha\beta}(z)\ \dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}$ است. با استفاده از $\sqrt{\dot{z}^2}\,d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}\,dz^{\mu}\,dz^{\nu}} = ds$ می‌توانیم در رابطه‌ی (۱۵.۱) پارامتربندی را از τ به ویژه زمان s تغییر داد. بعد از آن انتگرال‌گیری جزء به جزء روی دو جمله‌ی آخر در رابطه‌ی (۱۵.۱) انجام می‌دهیم. بدین طریق از عملگر دیفرانسیلی عمل‌کننده روی δz: $\delta\dot{z} = \frac{d}{ds}\delta z$ رها می‌شویم. پس، با استفاده از شرایط مرزی دیرکله، یعنی $\delta z(s_1) = \delta z(s_2) = 0$، به عبارت زیر برای وردش اول کنش S می‌رسیم: $\delta S = -m \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{2}\ \left\{\partial_{\alpha} g_{\mu\nu}(z)\,\delta z^{\alpha}\ \dot{z}^{\mu}\ \dot{z}^{\nu} - \frac{d}{ds}\left[g_{\mu\nu}(z)\ \ \dot{z}^{\nu}\right]\ \delta z^{\mu} - \frac{d}{ds}\left[g_{\mu\nu}(z)\ \ \dot{z}^{\mu}\right]\ \delta z^{\nu}\right\} = \mathrm{bqa}$

$$= -m \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{2} \left\{ \partial_\alpha g_{\mu\nu} \delta z^\alpha \, \dot{z}^\mu \, \dot{z}^\nu - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \, \dot{z}^\alpha \, \dot{z}^\nu \, \delta z^\mu - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \, \dot{z}^\alpha \, \dot{z}^\mu \, \delta z^\nu - 2 \, g_{\mu\nu} \ddot{z}^\mu \, \delta z^\nu \right\} =$$
$$= -m \int_{s_1}^{s_2} ds \left[\tfrac{1}{2} \left(\partial_\alpha \, g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha} \right) \, \dot{z}^\mu \, \dot{z}^\nu - g_{\mu\alpha} \, \ddot{z}^\mu \right] \, \delta z^\alpha.$$

که $\dot{z} = dz/ds$ و همچنین از این استفاده کردیم که $g_{\mu\nu} \, \ddot{z}^\mu \, \delta z^\nu = g_{\mu\nu} \, \delta z^\mu \, \ddot{z}^\nu$. با احتساب این‌که طبق اصل کمترین کنش δS باید برای هر δz^α صفر شود، به روابط زیر می‌رسیم:

$$\ddot{z}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(z) \, \dot{z}^\nu \, \dot{z}^\alpha = 0, \qquad (۱۵.۱)$$

که به آن معادله‌ی ژئودزی می‌گویند. در این‌جا نمادهای کریستوفل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} \, g^{\mu\beta} \left(\partial_\nu \, g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \, g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\nu\alpha} \right) \qquad (۱۶.۱)$$

۲.۱ حساب تانسوری و تانسور انحنا

ابتدا به تعریف تانسور می‌پردازیم. تحت تبدیل $x^\mu = x^\mu \left(\bar{x}^\nu \right)$ مختصات فضا-زمان به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \, d\bar{x}^\nu. \qquad (۱۷.۱)$$

اگر بردار A^μ مانند مختصات تحت تبدیل مختصات تغییر کند، به آن **هموردا** گفته می‌شود:

$$A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \, \bar{A}^\nu \left(\bar{x} \right). \qquad (۱۸.۱)$$

همزمان به بردار A_μ **پادوردا** گفته می‌شود اگر به صورت یک تک-فرم تبدیل شود:

$$A_\mu(x) \, dx^\mu = \bar{A}_\nu \left(\bar{x} \right) \, d\bar{x}^\nu, \quad \text{then} \quad A_\mu(x) = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \, \bar{A}_\nu \left(\bar{x} \right). \qquad (۱۹.۱)$$

با استفاده از تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ و معکوس آن، $g^{\mu\nu} \, g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$ ، می‌توان اندیس‌های هموردا را به پادوردا و بالعکس تبدیل کرد:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} \, A^\nu, \quad \text{and} \quad A^\mu = g^{\mu\nu} \, A_\nu. \qquad (۲۰.۱)$$

بطور خاص داریم $x_\mu = g_{\mu\nu} \, x^\nu$.

یک تانسور تایی-n متناظر با تعدادی اندیس‌های هموردا و پادوردا کمیتی است، که تحت تبدیل مختصات به صورت زیر تبدیل می‌شود ($l+k=n$) :

$$T^{\nu_1\ldots\nu_l}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \frac{\partial\bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\bar{x}^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial\bar{x}^{\beta_l}}\bar{T}^{\beta_1\ldots\beta_l}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(\bar{x})\,. \qquad (۲۱.۱)$$

در عمل ترتیب اندیس‌های بالا و پایین مهم است، اما برای ساده‌سازی این فرمول می‌توان فعلا از جزئیات صرف‌نظر کرد. برای مثال، برای متریک داریم

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu = \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x})\;d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta, \quad \text{then} \quad g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}\,\bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x})\,. \qquad (۲۲.۱)$$

با استفاده از تانسور متریک و تانسور معکوس آن می‌توان اندیس‌ها را بالا و پایین کرد: $T_{\mu\nu}{}^{\alpha}\,g^{\nu\beta} = T_\mu{}^{\beta\alpha}$.

همه این تعاریف برای ادغام تانسورها لازم هستند. برای مثال، $T^\mu{}_\nu{}^{\alpha\beta}\,M_\beta{}^\nu$ باید به صورت یک تانسور دوتایی تبدیل شود، که با تعاریف بالا اینطور می‌شود. در عمل، ضرب اسکالر دو بردار $A_\mu\,B^\mu = A^\mu\,B_\mu = g_{\mu\nu}\,A^\mu\,B^\nu = g^{\mu\nu}\,A_\mu\,B_\nu$ باید ناوردا باشد.

حال آماده‌ایم تا **مشتق‌گیری هموردا** را تعریف کنیم. مشتق معمولی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\partial_\nu A^\mu\,dx^\nu \equiv A^\mu(x+dx) - A^\mu(x). \qquad (۲۳.۱)$$

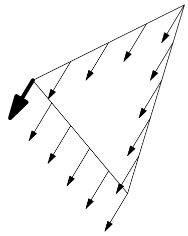
برای مشتق معمولی از نمایش‌های $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu A^\mu \equiv A^\mu_{,\nu}$. استفاده می‌کنیم. مشکل با مشتق معمولی $\partial_\nu A^\mu$ این است که بر خلاف این واقعیت که دو اندیس دارد، به صورت تانسور دوتایی تبدیل نمی‌شود. در واقع

$$\bar{A}^\alpha_{,\beta}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial\bar{x}^\beta}\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}A^\mu(x) = \frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\bar{x}^\beta}A^\mu_{,\nu}(x) + \frac{\partial^2\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\bar{x}^\beta}A^\mu(x). \qquad (۲۴.۱)$$

این مشتق هموردای بردار A^μ است که به صورت تانسور دوتایی تبدیل می‌شود. برای تعریف بهتر بیایید کمیت δA^μ را از مشتق معمولی کسر کنیم:

$$D_\alpha A^\mu\,dx^\alpha = \partial_\alpha A^\mu\,dx^\alpha - \delta A^\mu. \qquad (۲۵.۱)$$

برای مشتق هموردا از نمایش $D_\alpha A^\mu \equiv A^\mu_{;\alpha}$. استفاده می‌کنیم. تفسیر هندسی جمله‌ی δA^μ را در ادامه خواهیم گفت. مشکلات بالا با مشتق معمولی ناشی از این واقعیت است که برای بدست آوردن آن باید دو بردار $A^\mu(x+dx)$ و $A^\mu(x)$ ، که در دو نقطه مختلفِ $x+dx$ و x تعریف شده اند را از هم کم کنیم. برای غلبه



شکل ۴.۱:

برای این مشکلات، می‌بایست $A^\mu(x)$ را به نقطه‌ی $x+dx$ انتقال موازی دهیم. این دقیقا همان کاری است که اضافه کردن δA^μ انجام می‌هد:

$$D_\alpha A^\mu \, dx^\alpha \equiv A^\mu \left(x+dx\right) - \left[A^\mu(x) + \delta A^\mu(x)\right]. \qquad (۲۶.۱)$$

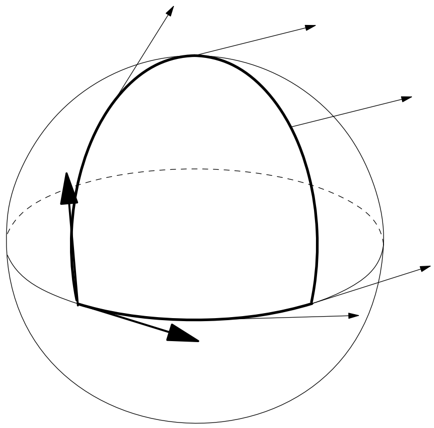
برای مقادیر کوچک dx کمیت δA^μ باید بر حسب dx و همچنین A^μ خطی باشد. بنابراین، باید به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\delta A^\mu(x) \equiv -\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x)\, A^\nu(x)\, dx^\alpha, \qquad (۲۷.۱)$$

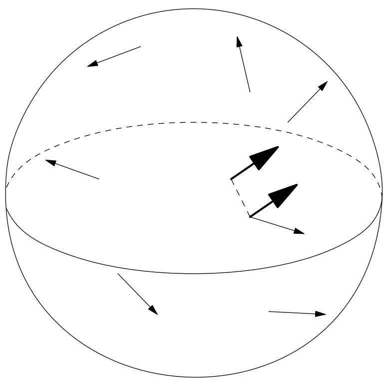
که $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x)$ **هموستار** است. واضح است که $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x)\, dx^\alpha = M^\mu_\nu$ یک ماتریس است که بردار A_μ را طی انتقال موازی انتقال می‌دهد.

برای اینکه معنای هموستار را واضح‌تر کنیم باید گفت که یک فضا دو بعدی تخت رو یک مسیر مثلث شکل بسته را در نظر بگیرید (شکل (۴.۱)). بیایید انتقال موازی یک بردار در این مسیر را ببینیم. قاعده انتقال موازی این است که زاویه‌ذی بین دو بردار و مسیر همواره طی مسیر ثابت باقی بماند. پس، همان‌طور که از شکل (۴.۱) مشخص است در فضای تخت بردار به همان موقعیت پیشین پس از انتقال موازی در امتداد یک مسیر بسته باز می‌گردد. حالا بیایید در یک فضای خمیده، یک کره (شکل (۵.۱)) ببینیم چطور اتفاق می‌افتد. قطعاتی از سه استوای مختلف را به عنوان بخش‌هایی از مسیر مثلثی بسته روی کره در نظر می‌گیریم. می‌توان از شکل (۵.۱) دید که بردارها به همان مکان قبلی پس از انتقال موازی باز نمی‌گردند. سرانجام، برای روشن کردن معنای مشتق‌گیری هموردا یک میدان برداری روی کره را در نظر بگیرید (شکل (۶.۱)). برای تفریق کردن یک مقدار از میدان برداری در یک نقطه از مقدار آن در یک مکان نزدیک، بردار را از مکان آخر به مکان اول انتقال موازی می‌دهیم (مطابق شکل (۶.۱)).

از روابط (۲۴.۱) و (۲۶.۱) برای $D_\alpha A^\mu$ برای آنکه تانسور دوتایی باشد هموستار $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ باید به صورت زیر



شکل ۱.۵:



شکل ۱.۶:

تبدیل شود:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}(x) = \bar{\Gamma}^{\beta}_{\gamma\sigma}\left(\bar{x}\right) \, \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \, \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \, \frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^{2} \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} \, \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}. \tag{۲۸.۱}$$

همزمان ضرب برداری نباید تحت انتقال موازی تغییر کند. بنابراین، از این‌که $\delta\left(A_{\mu}\, B^{\mu}\right) = 0$ داریم:

$$B^{\mu}\, \delta A_{\mu} = -A_{\mu} \delta B^{\mu} = A_{\mu}\, \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\, B^{\nu}\, dx^{\alpha}, \tag{۲۹.۱}$$

که برای بدست آوردن تساوی آخر از رابطه‌ی (۲۷.۱) برای δB^{μ} استفاده کرده‌ایم. از آن‌جا که رابطه‌ی (۲۹.۱) باید برای هر B^{μ} صادق باشد، داریم:

$$\delta A_{\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}(x)\, A_{\nu}(x)\, dx^{\alpha}, \tag{۳۰.۱}$$

در نتیجه تعاریف زیر را برای مشتق هموردا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{;\alpha} &\equiv D_{\alpha} A^{\mu} = \partial_{\alpha} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\, A^{\nu} = \left(\partial_{\alpha}\, \delta^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\right)\, A^{\nu}, \\ A_{\mu;\,\alpha} &\equiv D_{\alpha} A_{\mu} = \partial_{\alpha} A_{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}\, A_{\nu} = \left(\partial_{\alpha}\, \delta^{\nu}_{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}\right)\, A_{\nu}. \end{aligned} \tag{۳۱.۱}$$

بطور مشابه، مشتق همورداى تانسورهای مرتبه بالاتر به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu}_{;\alpha} = D_{\alpha} A^{\mu\nu} &= \partial_{\alpha} A^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\, A^{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\, A^{\mu\beta}, \\ A^{\mu}_{\nu;\,\alpha} = D_{\alpha} A^{\mu}_{\nu} &= \partial_{\alpha} A^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\, A^{\beta}_{\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\, A^{\mu}_{\beta}, \\ A_{\mu\nu;\,\alpha} = D_{\alpha} A_{\mu\nu} &= \partial_{\alpha} A_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\, A_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\, A_{\mu\beta}, \quad \text{etc..} \end{aligned} \tag{۳۲.۱}$$

برای $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ از این رابطه استفاده خواهیم کرد:

$$\Gamma_{\beta|\,\nu\alpha} = g_{\beta\mu}\, \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}. \tag{۳۳.۱}$$

برای متریک مینکوفسکی، $\eta_{\mu\nu}$، داریم: $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = 0$.
برای راحتی، دستگاه مرجع مینکوفسکی موضعی[1] (LMRS) تعریف می‌کنیم. چنین دستگاهی در همسایگی

[1] Locally Minkowskian Reference System

نقطه‌ی دلخواه x_0 به این صورت است

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}, \quad \text{and} \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x_0) = 0, \tag{۳۴.۱}$$

اما این بدین معنا نیست که مشتقات $g_{\mu\nu}$ و $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ صفر می‌شوند. در ادامه خواهیم دید شرط را وقتی که غیر ممکن است مشتق‌ها صفر شوند.

بیایید ببینیم تحت چه شرایطی می‌توانیم پیمانه‌ای نظیر پیمانه‌ی (۳۴.۱) مشخص کنیم. نقطه‌ی x_0 را مبداء دو دستگاه مرجع در نظر می‌گیریم، دستگاه K و دستگاه مرجع $\bar{K}$. سپس، اگر $\xi = x - x_0$ و $\bar{\xi} = \bar{x} - x_0$، می‌توانیم بسط زیر را بنویسیم:

$$\bar{\xi}^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta}\,\xi^{\beta} + \frac{1}{2}\,B^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\xi^{\beta}\,\xi^{\gamma} + \mathcal{O}\left(\xi^3\right). \tag{۳۵.۱}$$

که A^{μ}_{ν} و $B^{\mu}_{\nu\alpha}$ تانسورهای ثابت پارامتری هستند. دقت کنید که $B^{\alpha}_{\beta\gamma} = B^{\alpha}_{\gamma\beta}$.
تحت چنین تبدیل داریم:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\beta}(x_0) &= A^{\mu}_{\alpha}\,A^{\nu}_{\beta}\,g_{\mu\nu}(x_0) + \mathcal{O}(\xi), \\ \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(x_0) &= A^{\alpha}_{\mu}\,A^{\nu}_{\beta}\,A^{\sigma}_{\gamma}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}(x_0) - B^{\alpha}_{\mu\nu}\,A^{\mu}_{\beta}\,A^{\nu}_{\gamma} + \mathcal{O}(\xi). \end{aligned} \tag{۳۶.۱}$$

با استفاده از ۱۶ مؤلفه‌ی A^{μ}_{α} همواره می‌توانیم ۱۰ معادله‌ی $\bar{g}_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}$ را حل کنیم. ۶ پارامتر باقیمانده از A^{μ}_{ν} که متناظر با ۳ چرخش و ۳ انتقال لورنتزی هستند، که تحت آن تانسور متریک مینکوفسکی تغییر نمی‌کند. علاوه بر این، می‌توان با انتخاب $B^{\alpha}_{\mu\nu} = A^{\alpha}_{\gamma}\,\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}(x_0)$ قرار داد $\bar{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma}(x_0) = 0$.

معنای فیزیکی دستگاه مرجع مورد بحث بسیار ساده است. هر فضا زمانی در همسایگی به اندازه کافی کوچک هر نقطه‌ای تقریبا تخت به نظر می‌رسد. البته در این همسایگی تقریبا تخت هر نقطه‌ای می‌تواند مختصات مینکوفسکی را مشخص کند. از محاسبات بالا در همسایگی یک نقطه‌ی x_0 بدست می‌آید:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}\left(|x - x_0|^2\right), \quad \text{and} \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) = 0 + \mathcal{O}(x - x_0), \tag{۳۷.۱}$$

انتخاب یک دستگاه مرجع را انتخاب یک پیمانه خواهیم نامید.

حال بیایید **پیچش** را تعریف کنیم:

$$S^{\mu}_{\nu\alpha} \equiv \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}. \tag{۳۸.۱}$$

طبق رابطه‌ی (۲۸.۱) پیچش تحت تبدیلات به صورت تانسور سه تایی تبدیل می‌شود. اگر پیمانه‌ی LMRS را در نقطه‌ی دلخواه x انتخاب کنیم، بدست خواهیم آورد: $S^{\mu}_{\nu\alpha} = 0$ ، چرا که $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = 0$. اما، $S^{\mu}_{\nu\alpha}$ به صورت یک تانسور تبدیل می‌شود. بنابراین، اگر مؤلفه‌های این تانسور توابع هموراری باشند، این تانسور در هر دستگاه مرجع دیگری صفر خواهد شد. به دلیل آزادی انتخاب نقطه x نتیجه می‌گیریم که اگر متریک به اندازه کافی هموار باشد و پیمان‌ی LMRS ممکن باشد، بنابراین

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}, \tag{۳۹.۱}$$

به عبارت دیگر، هموستار تحت تعویض اندیس‌های پایین متقارن است. خمینه‌هایی که در آن‌ها تانسور پیچش صفر می‌شود، **خمینه‌های ریمانی** نامیده می‌شوند.

حال، هموستار را بر حسب تانسور متریک توضیح می‌دهیم. ابتدا نشان می‌دهیم که هر تانسور متریکی باید به صورت هموردا ثابت باشد. در واقع،

$$D_{\alpha}A_{\mu} = D_{\alpha}\left(g_{\mu\nu}\,A^{\nu}\right) = \left(D_{\alpha}g_{\mu\nu}\right)\,A^{\nu} + g_{\mu\nu}\,D_{\alpha}A^{\nu}. \tag{۴۰.۱}$$

اما $D_{\alpha}A_{\mu}$ تانسور دوتایی است. بنابراین، با تعریف رابطه‌ی بین اندیس‌های هموردا و پادوردا، باید داشته باشیم $D_{\alpha}A_{\mu} = g_{\mu\nu}\,D_{\alpha}A^{\nu}$. پس، از رابطه‌ی (۴۰.۱) نتیجه می‌شود که تانسور متریک باید به صورت هموردا ثابت باشد: $D_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$. با استفاده از روابط (۳۲.۱) و (۳۳.۱) ، این شرط را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

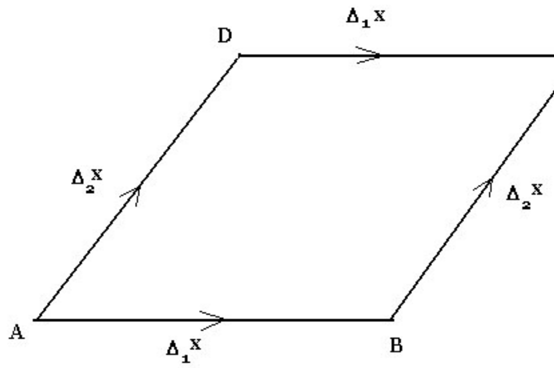
$$g_{\mu\nu;\,\alpha} \equiv D_{\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu|\,\nu\alpha} - \Gamma_{\nu|\,\mu\alpha} = 0. \tag{۴۱.۱}$$

با بازآرایی اندیس‌ها در این معادله خواهیم یافت که:

$$\begin{aligned} &\partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha|\,\mu\nu} - \Gamma_{\mu|\,\alpha\nu} = 0, \\ &\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\alpha|\,\nu\mu} - \Gamma_{\nu|\,\alpha\mu} = 0. \end{aligned} \tag{۴۲.۱}$$

پس، با استفاده از دستگاه سه معادله‌ی خطی در $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ و اتحاد (۳۹.۱) ، رابطه‌ای بین هموستار و تانسور متریک خواهیم یافت:

$$\Gamma_{\alpha|\,\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\left(\partial_{\nu}\,g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}\,g_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha}\,g_{\mu\nu}\right), \tag{۴۳.۱}$$



شکل ۷.۱:

و یا

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, \left(\partial_\nu\, g_{\beta\mu} + \partial_\mu\, g_{\nu\beta} - \partial_\beta\, g_{\mu\nu}\right). \qquad (۴۴.۱)$$

بنابراین، برای خمینه‌های ریمانی هموستار $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ با نمادهای کریستوفل تطابق پیدا می‌کنند.
در نتیجه، معادله ژئودزی که پیش‌تر یافتیم یک معنای هندسی روشن پیدا می‌کند

$$\left[\frac{d}{ds}\delta^{\mu}_{\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\left[z(s)\right]\, u^{\nu}(s)\right] u^{\alpha}(s) = \left[\dot{z}^{\nu}\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\delta^{\mu}_{\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\left[z(s)\right]\, u^{\nu}(s)\right] u^{\alpha}(s) = u^{\nu}(s)\, D_\nu u^{\mu}(s) = 0 \qquad (۴۵.۱)$$

به عنوان شرط هموردایی ثابت بردار چهار–سرعت $u^{\mu} = dz^{\mu}/ds$ در امتداد مسیر ژئودزی. در واقع، جمله $u^{\alpha}\, D_\alpha u^{\mu}$ فقط تصویر مشتق هموردای $D_\alpha u^{\mu}$ روی بردار مماس بر ژئودزی u^{α} است.

حال، انحنای تانسور ریمان را تعریف می‌کنیم. ابتدا بیایید انتقال‌های موازیِ یک بردار v^{μ} از نقطه‌ی A به یک نقطه‌ی نزدیک C در امتداد دو مسیر دیفرانسیلی بی‌نهایت کوچک را بررسی کنیم، یعنی مسیرهای ABC و ADC، مطابق شکل (۷.۱).

اگر v^μ را از A به B انتقال موازی دهیم، خواهیم یافت

$$v^\mu_{AB} \approx v^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(A)\; v^\nu\, \Delta_1 x^\alpha. \qquad (۴۶.۱)$$

در این‌جا $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(A)$ مقدار نماد کریستوفل در نقطه‌ی A است. پس،

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(B) \approx \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(A) + \partial_\beta\, \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(A)\; \Delta_1 x^\beta. \qquad (۴۷.۱)$$

حال انتقال موازی را از B به C انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} v^\mu_{ABC} &\approx v^\mu_{AB} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(B)\; v^\nu_{AB}\, \Delta_2 x^\alpha \approx \\ &\approx v^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(A)\; v^\nu\, \Delta_1 x^\alpha - \left[\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(A) + \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(A)\; \Delta_1 x^\beta\right] \left[v^\nu - \Gamma^\nu_{\beta\delta}(A)\; v^\beta\, \Delta_1 x^\delta\right] \Delta_2 x^\alpha \approx \\ &\approx v^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\, v^\nu\, \Delta_1 x^\alpha - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\, v^\nu\, \Delta_2 x^\alpha - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\, v^\nu\, \Delta_1 x^\beta\, \Delta_2 x^\alpha + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\, \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\, v^\beta\, \Delta_1 x^\gamma\, \Delta_2 x^\alpha \end{aligned} \qquad (۴۸.۱)$$

بطور مشابه انتقال موازی را در امتداد مسیر ADC انجام می‌دهیم:

$$v^\mu_{ADC} \approx v^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\, v^\nu\, \Delta_2 x^\alpha - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\, v^\nu\, \Delta_1 x^\alpha - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\, v^\nu\, \Delta_1 x^\alpha\, \Delta_2 x^\beta + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\, \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\, v^\beta\, \Delta_1 x^\alpha\, \Delta_2 x^\gamma \qquad (۴۹.۱)$$

پس اختلاف بین دو نتیجه دو انتقال موازی v^μ_{ABC} و v^μ_{ADC} به این صورت خواهد بود:

$$\begin{aligned} v^\mu_{ABC} - v^\mu_{ADC} &\approx -\left[\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}\right] v^\nu\, \Delta_1 x^\alpha\, \Delta_2 x^\beta \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{2}\, R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\, v^\nu\, \Delta S^{\alpha\beta}, \end{aligned} \qquad (۵۰.۱)$$

که در این‌جا تعریف کرده‌ایم $\Delta S^{\alpha\beta} = \Delta_1 x^\alpha\, \Delta_2 x^\beta - \Delta_1 x^\beta\, \Delta_2 x^\alpha$. مدول این کمیت مساحت موازی نگار نشان داده شده در شکل (۷.۱) را تعریف می‌کند، و

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\alpha} \qquad (۵۱.۱)$$

تانسور ریمان است که به دنبالش بوده‌ایم. تانسور ریمان چیز خاصی نیست اما انحنا برای هموستار مورد بحث:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \left[D^\mu_{\alpha\gamma},\, D^\gamma_{\beta\nu}\right] \equiv D^\mu_{\alpha\gamma}\, D^\gamma_{\beta\nu} - D^\mu_{\beta\gamma}\, D^\gamma_{\alpha\nu}, \quad \text{where} \quad D^\mu_{\alpha\nu} = \partial_\alpha\, \delta^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}. \qquad (۵۲.۱)$$

از این تعریف تانسور به این شکل هم استفاده می‌کنند: $R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\gamma}\, R^{\gamma}{}_{\nu\alpha\beta}$.

به وضوح در فضا زمان $v_{ABC} = v_{ADC}$ است، بنابراین تانسور ریمان معیار این است که فضا-زمان چطور انحنا یافته است. توجه نمائید که تانسور ریمان تحت تبدیلات مختصات به صورت ضربی تبدیل می‌شود. بنابراین، اگر در یک چارچوب مرجع صفر باشد، پس در هر چارچوب دیگری نیز صفر خواهد بود.

حال، ویژگی‌های تانسور ریمان را مشخص می‌کنیم. در یک همسایگی هر نقطه‌ی دلخواه x در پیمانه‌ی LMRS (۳۴.۱) این تانسور برابر است با:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu|\,\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma_{\mu|\,\nu\alpha} = \frac{1}{2}\,\left[\partial^2_{\nu\alpha}\, g_{\mu\beta} - \partial^2_{\nu\beta}\, g_{\mu\alpha} - \partial^2_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta} + \partial^2_{\mu\beta}\, g_{\nu\alpha}\right], \tag{۵۳.۱}$$

که $\partial^2_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta$ است و همچنین از نمادگذاری $\partial^2_{\alpha\beta}\, g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$ استفاده خواهیم کرد. حال، می‌توان دید که اگر فضا-زمان خمیده باشد، پس حتی در پیمانه‌ی LMRS نمی‌توان مشتق اول نمادهای کریستوفل یا مشتق دوم تانسور متریک را صفر کرد.

از رابطه‌ی (۵۳.۱) بلافاصله می‌توان اتحاد زیر برای تانسور ریمان را نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \\ &R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0. \end{aligned} \tag{۵۴.۱}$$

به علاوه، با مشتق‌گیری از (۵۳.۱)، خواهیم یافت:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta;\,\gamma} + R^{\mu}{}_{\nu\gamma\alpha;\,\beta} + R^{\mu}{}_{\nu\beta\gamma;\,\alpha} = 0, \tag{۵۵.۱}$$

که به این رابطه **اتحاد بیانکی** گفته می‌شود اگرچه این اتحادها را در LMRS یافتیم، اما آن‌ها برای هر دستگاه مرجعی معتبر هستند چرا که کمیت‌های تانسوری را به هم مرتبط می‌کنند، که به صورت ضربی تحت تبدیلات مختصات تغییر می‌کنند.

ادغام (تنجش) تانسور ریمان روی هر یک از دو اندیس می‌تواند منجر به صفر شدن آن شود، $R^{\alpha}{}_{\alpha\mu\nu} = 0$ (به دلیل پادر متقارن بودن $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ تحت تعویض اندیس‌های متناظر)، یا اینکه **تانسور ریچی** را تولید کند، $R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$. تانسور ریچی متقارن است $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. ادغام کردن دو اندیس باقی مانده، **اسکالر ریچی** را نتیجه می‌دهد $R \equiv R_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}$. علاوه بر این‌ها، با ادغام اندیس در رابطه‌ی (۵۵.۱)، اتحاد کاربردی زیر بدست می‌آید:

$$R^{\nu}_{\mu;\,\nu} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu R. \tag{۵۶.۱}$$

حال بیاید تعداد عناصر مستقل تانسور ریمان در فضا-زمان D-بعدی را بیابیم. تانسور ریمان $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ تحت تعویض اندیس‌ها $\nu \longleftrightarrow \mu$ و $\beta \longleftrightarrow \alpha$ پاد متقارن است. بنابراین، تعداد کل ترکیب‌های مستقل هر جفت $\mu\nu$ و $\alpha\beta$ در D بعد برابر با $D\,(D-1)/2$ می‌شود. از طرف دیگر، تانسور $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ تحت تعویض جفت‌های $\alpha\beta \longleftrightarrow \mu\nu$ متقارن است. بنابراین، تعداد کل ترکیب‌های مستقل اندیس‌ها برابر است با:

$$\frac{1}{2}\,\frac{D\ (D-1)}{2}\ \left[\frac{D\ (D-1)}{2}+1\right]. \tag{۵۷.۱}$$

اما، باید تقارن چرخه‌ای را نیز به حساب آوریم:

$$B_{\mu\nu\alpha\beta}=R_{\mu\nu\alpha\beta}+R_{\mu\alpha\beta\nu}+R_{\mu\beta\nu\alpha}=0. \tag{۵۸.۱}$$

برای یافتن تعداد این روابط دقت نمایید که تانسور $B_{\mu\nu\alpha\beta}$ کاملا پادمتقارن است. برای مثال،

$$B_{\mu\nu\alpha\beta}=R_{\mu\nu\alpha\beta}+R_{\mu\alpha\beta\nu}+R_{\mu\beta\nu\alpha}=-R_{\nu\mu\alpha\beta}-R_{\nu\alpha\beta\mu}-R_{\nu\beta\mu\alpha}=-B_{\nu\mu\alpha\beta}. \tag{۵۹.۱}$$

پس، می‌توان دید که تعداد کل شرایط مستقل، یعنی $B_{\mu\nu\alpha\beta}=0$، برابر با $D\ (D-1)\ (D-2)\ (D-3)\ /4!$ است. در نتیجه، تعداد عناصر مستقل تانسور ریمان برابر می‌شود با:

$$\frac{1}{2}\,\frac{D\ (D-1)}{2}\ \left[\frac{D\ (D-1)}{2}+1\right]-\frac{D\ (D-1)\ (D-2)\ (D-3)}{4!}=\frac{D^2\ (D^2-1)}{12}. \tag{۶۰.۱}$$

بطور خاص، در چهار بعد ۲۰ عنصر مستقل داریم، در ۳ بعد، ۶ عنصر، و در ۲ بعد تنها یک عنصر مستقل داریم.

در اصل، حول هر نقطه‌ی دلخواه می‌توان تعداد عناصر مستقل تانسور ریمان را کاهش داد. در واقع، LMRS حول چنین نقطه‌ای وابسته به چرخش و انتقال‌ها تعریف می‌شود. بنابراین، با انتخاب مناسب پارامترهای چرخش می‌توان تعداد عناصر تانسور ریمان بیشتری را صفر کرد.

۳.۱ معادلات میدان

مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که فضا-زمان حول هر چیزی که انرژی حمل کند خمیده می‌شود. به دیگر سخن، تانسور متریک یک متغیر دینامیکی است که به انرژی حمل شده توسط ماده جفت شده است. در ادامه خواهیم دید که هر آنچه نیاز داریم برای فرمول‌بندی گرانش نیوتنی، هموردایی عام و اصل کمترین کنش است.

واضح است که معادلات حرکت باید تحت تبدیل مختصات عام ناوردا باشند، به بیان دیگر آن‌ها باید شکل یکسانی در تمام دستگاه‌های مختصات داشته باشند. بنابراین، کنش متناظر برای متریک باید تحت تبدیلات ناوردا بماند. اگر یک تانسور متریک داشته باشیم، ساده‌ترین ناوردایی که میتوان نوشت حجم فضا-زمان است، $I = \int \sqrt{|g|}\, d^4x$، که $|g|$ مدول دترمینان تانسور متریک است $|\det\left(g_{\mu\nu}\right)|$ و $d^4x = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$. اما این به تنهایی، برای کنش کافی نیست چرا که شامل مشتقات متریک نمی‌باشد. در واقع، پس از کاربرد اصل کم‌ترین کنش مناسب برای کنش برای این ناوردا یک عبارت جبری به جای معادله حرکت دیفرانسیلی (دینامیکی) برای متریک خواهیم یافت.

ساده‌ترین ناوردایی که شامل مشتقات متریک باشد، اسکالر ریچی است $R = R_{\mu\alpha}\, g^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, R_{\mu\nu\alpha\beta}$. بنابراین، ساده‌ترین کنش ناوردا برای متریک به تنهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$S = a \int d^4x\, \sqrt{|g|}\, R + b \int d^4x\, \sqrt{|g|}, \qquad (۶۱.۱)$$

که a و b ثوابت بعدداری هستند، که می‌توان فقط بر اساس داده‌های تجربی معین کرد. آن‌چه که باید به این کنش اضافه کرد ماده است. کنش S_M توصیف کننده‌ی جفت‌شدگی ماده به گرانش است، به بیان دیگر جفت شدگی به تانسور متریک. کنش برای یک ذره نقطه‌ای، $S_M = -m \int ds = -m \int d\tau\, \sqrt{g_{\mu\nu}(z)\, \dot{z}^\mu\, \dot{z}^\nu}$ است. تنها چیزی که پیرامون S_M باید بدانیم این نکته است که باید تحت تبدیلات مختصات عام ناوردا بماند.

حال، می‌خواهیم اصل کم‌ترین کنش را به کنش زیر اعمال کنیم:

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi\kappa} \int d^4x\, \sqrt{|g|}\, \left(R + \Lambda\right) + S_M\left(g_{\mu\nu}, \text{ماده}\right), \qquad (۶۲.۱)$$

که به آن **کنش اینشتین-هیلبرت** گفته می‌شود. در این‌جا ثوابت a و b را در (۶۱.۱) مشخص کرده‌ایم، با علم به این‌که پیش‌تر مقادیر آن‌ها را می‌دانیم. کمیت Λ به عنوان **ثابت کیهان‌شناختی** مشهور است و κ وابسته به ثابت نیوتن است.

از اصل کم‌ترین کنش داریم

$$0 = \delta_g S_{EH} = -\frac{1}{16\,\pi\,\kappa}\, \delta_g \int d^4x\, \sqrt{|g|}\, \left(g^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu} + \Lambda\right) + \delta_g S_M =$$
$$= -\frac{1}{16\,\pi\,\kappa} \int d^4x\, \left[\left(\delta\sqrt{|g|}\right)\, \left(R + \Lambda\right) + \sqrt{|g|}\, \left(\delta g^{\mu\nu}\right)\, R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|}\, \left(\delta R_{\mu\nu}\right)\, g^{\mu\nu}\right] + \delta_g S_M, \qquad (۶۳.۱)$$

که $\delta_g S \equiv \left[S(g + \delta g) - S(g)\right]_{linear\ in\ \delta g}$ و در فرینه‌ی S خواهیم داشت $\delta_g S = 0$. ابتدا $\delta\sqrt{|g|}$ را

خواهیم یافت. برای این کار اتحاد معمولی را بدست می‌آوریم:

$$\delta \log \left|\det \hat{M}\right| \equiv \log \left|\det \left(\hat{M}+\delta \hat{M}\right)\right| - \log \left|\det \hat{M}\right| = \log \frac{\det\left(\hat{M}+\delta\hat{M}\right)}{\det \hat{M}} =$$
$$= \log\det\left[\hat{M}^{-1}\,\left(\hat{M}+\delta\hat{M}\right)\right] = \log\det\left[\hat{\mathbf{1}}+\hat{M}^{-1}\,\delta\hat{M}\right] = \mathrm{Tr}\log\left[\hat{\mathbf{1}}+\hat{M}^{-1}\,\delta\hat{M}\right] \approx \mathrm{Tr}\hat{M}^{-1}\,\delta\hat{M} \qquad (۶۴.۱)$$

در این زنجیره روابط $\hat{M}$ یک ماتریس غیر تبهگن معمول است و رد این ماتریس را تنها بر حسب جملات خطی در $\delta\hat{M}$ نگه می‌داریم.

با اعمال معادله بدست آمده برای $g_{\mu\nu}$ و تانسور معکوس آن $g^{\mu\nu}$ بدست خواهد آمد:

$$\delta \log \sqrt{|g|} \equiv \delta \log \sqrt{|\det\left(g_{\mu\nu}\right)|} = -\frac{1}{2}\,\delta\log\left|\det\left(g^{\mu\nu}\right)\right| = -\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}.$$

بنابراین،

$$\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}. \qquad (۶۵.۱)$$

دوما، با جمله‌ی $\int d^4x\,\sqrt{|g|}\,\delta R_{\mu\nu}\,g^{\mu\nu}$ در رابطه‌ی (۶۳.۱) ادامه می‌دهیم. در **LMRS**، که $g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\mu\nu}$ و $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}(x)=0$ ، داریم:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}\right) = \partial_\alpha\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) - \partial_\nu\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) = D_\alpha\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) - D_\nu\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right). \qquad (۶۶.۱)$$

جمله آخر عبارت بالا تانسور دوتایی است. بنابراین، یک رابطه‌ی تانسوری بین $\delta R_{\mu\nu}$ و $\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ داریم که در هر دستگاه مرجعی معتبر است، اگرچه در **LMRS** بدست آمده است. بنابراین،

$$g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = D_\mu\left(g^{\alpha\beta}\,\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\,\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) \equiv D_\mu\delta U^\mu \qquad (۶۷.۱)$$

که مشتق هموردای کلِ یک چهار-بردار δU^μ است. در نتیجه،

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{|g|}\,D_\mu\delta U^\mu = \oint_{\partial\mathcal{M}} d\Sigma_\mu\,\delta U^\mu, \qquad (۶۸.۱)$$

که $\mathcal{M}$ خمینه‌ی فضا-زمان مورد بررسی است و $\partial\mathcal{M}$ مرز آن است. برای بدست آوردن تساوی آخر، از قضیه‌ی استوکس استفاده کردیم و $d\Sigma_\mu$ چهار-بردار عمود بر $\partial\mathcal{M}$ است، که مدول آن عنصر حجم بسیار کوچکِ

$\partial\mathcal{M}$: $d\Sigma_\mu = n_\mu\,\sqrt{g^{(3)}}\,d^3\xi$ است که n_μ بردار عمود بر مرز است، $g^{(3)} = |\det g_{ij}|$ دترمینان متریک سه بعدی القاء شده، $g_{ij},\ i=1,2,3$ است، روی مرز $\partial\mathcal{M}$ و ξ مختصات متناظری هستند که مرز را پارامتربندی می‌کنند.

در نظر گرفتن مشارکت مرز یک موضوع جالب جداگانه است، اما در این‌جا کنش را با چنین شرایطی وردش می‌دهیم $\delta U^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. بنابراین، $\int d^4x\,\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = 0$. از ترکیب در رابطه‌ی (۶۳.۱) با رابطه‌ی (۶۵.۱)، خواهیم داشت:

$$0 = \delta_g S_M - \frac{1}{16\,\pi\,\kappa}\int d^4x\,\sqrt{|g|}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,R - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,\Lambda\right)\,\delta g^{\mu\nu}. \qquad (۶۹.۱)$$

آنچه باقی می‌ماند یافتن $\delta_g S_M$ است.

حال بیایید فرض کنیم، کنش ماده، تحت تبدیلات مختصات عام ناوردا باشد، و شکل $S_M = \int d^4x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{L}$ داشته باشد، که $\mathcal{L}$ چگالی لاگرانژی ناوردا است. برای مثال،

$$\int ds = \int d\tau\,\sqrt{g_{\mu\nu}(z)\,\dot{z}^\mu\,\dot{z}^\nu} = \int d^4x\,\sqrt{|g(x)|}\,\int d\tau\,\frac{\delta^{(4)}\,[x - z(\tau)]}{\sqrt{|g(z)|}}\,\sqrt{g_{\mu\nu}(z)\,\dot{z}^\mu\,\dot{z}^\nu}. \qquad (۷۰.۱)$$

پس

$$\begin{aligned}\delta_g S_M &= \delta\int d^4x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{L} = \int d^4x\,\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu}\,\sqrt{|g|} + \mathcal{L}\,\delta\sqrt{|g|}\right] = \\ &= \int d^4x\,\sqrt{|g|}\,\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,g_{\mu\nu}\right]\,\delta g^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{|g|}\,T_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu},\end{aligned} \qquad (۷۱.۱)$$

که تانسور جدید زیر را معرفی کردیم:

$$T_{\mu\nu} = 2\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}\,g_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \qquad (۷۲.۱)$$

اما معنای فیزیکی $T_{\mu\nu}$ چیست؟ بین وردش‌های متریک $\delta g^{\mu\nu}$ ، آن‌هایی هستند که در آن‌ها وردش‌های خمش فضا زمان، $\delta R_{\mu\nu\alpha\beta} \neq 0$. اما وردش‌هایی از تانسور متریک هستند که به ناشی از تغییر مختصات هستند، یعنی برای آن‌ها $\delta R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$. شکل وردش‌های نوع دوم را مشخص می‌کنیم. تحت تبدیلات مختصات عام تانسور معکوس متریک به این صورت تبدیل می‌شود:

$$\bar{g}^{\mu\nu}\,(\bar{x}) = g^{\alpha\beta}(x)\,\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial\bar{x}^\nu}{\partial x^\beta}. \qquad (۷۳.۱)$$

به دنبال شکل بی‌نهایت کوچک این تبدیل هستیم، یعنی وقتی ماتریس تبدیل $\partial\bar{x}^\mu/\partial x^\nu$ نزدیک به ماتریس واحد باشد. اگر داشته باشیم $\bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ ، که $\epsilon^\mu(x)$ یک میدان برداری کوچک است، پس:

$$\bar{g}^{\mu\nu}\left(\bar{x}\right) \approx g^{\alpha\beta}(x)\,\left(\delta^\mu_\alpha + \partial_\alpha\epsilon^\mu\right)\,\left(\delta^\nu_\beta + \partial_\beta\epsilon^\nu\right) = g^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu\epsilon^\nu + \partial^\nu\epsilon^\mu \equiv g^{\mu\nu}(x) + \partial^{(\mu}\epsilon^{\nu)} \tag{۷۴.۱}$$

در این‌جا δ^μ_ν دلتای کرونکر است. با احتساب این

$$\bar{g}^{\mu\nu}\left(\bar{x}\right) = \bar{g}^{\mu\nu}\left(x+\epsilon\right) \approx \bar{g}^{\mu\nu}(x) + \partial_\alpha\bar{g}^{\mu\nu}(x)\,\epsilon^\alpha, \tag{۷۵.۱}$$

در مرتبه خطی بر حسب ϵ داریم:

$$\delta_\epsilon g^{\mu\nu} \equiv \bar{g}^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) \approx -\partial_\alpha g^{\mu\nu}\,\epsilon^\alpha + \partial^{(\mu}\epsilon^{\nu)} = D^{(\mu}\epsilon^{\nu)}. \tag{۷۶.۱}$$

تحت چنین وردش متریکی کنش S_M اصلا نباید تغییر کند، چرا که ناوردا است. بنابراین با استفاده از (۷۱.۱) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} 0 \equiv \delta_\epsilon S_M = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{|g|}\,T_{\mu\nu}\,D^{(\mu}\epsilon^{\nu)} &= \int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{|g|}\,T_{\mu\nu}\,D^\mu\epsilon^\nu = \\ = \int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{|g|}\,D^\mu\left(T_{\mu\nu}\,\epsilon^\nu\right) &- \int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{|g|}\,\epsilon^\nu\left(D^\mu\,T_{\mu\nu}\right) = \\ = \oint_{\partial\mathcal{M}} d\Sigma^\mu\,T_{\mu\nu}\,\epsilon^\nu &- \int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{|g|}\,\epsilon^\nu\,\left(D^\mu\,T_{\mu\nu}\right), \end{aligned} \tag{۷۷.۱}$$

که از تقارن $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ استفاده کرده‌ایم، و انتگرال‌گیری جزء به جزء با استفاده از قضیه‌ی استوکس انجام داده‌ایم. فرض می‌کنیم وردش‌ها در مرز صفر می‌شوند، $\epsilon^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. پس، چون $\delta_\epsilon S_M$ باید در هر ϵ^μ درون خمینه $\mathcal{M}$ صفر شود، اتحاد زیر را بدست می‌آوریم:

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{۷۸.۱}$$

که تعمیم هموردای قانون پایستگی است. در واقع در فضا-زمان مینکوفسکی به رابطه‌ی $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ تقلیل می‌یابد، که قانون پایستگی است که از قضیه‌ی نوتر اعمال شده بر انتقال‌های فضا-زمان بدست می‌آید. بنابراین، $T_{\mu\nu}$ چیزی جز **تانسور انرژی تکانه** نیست.

در مجموع، از رابطه‌ی (۷۱.۱) و (۶۹.۱) بدست می‌آوریم:

$$0=-\frac{1}{16\,\pi\,\kappa}\int d^4x\sqrt{|g|}\left\{R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,R\,g_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,\Lambda\,g_{\mu\nu}-8\,\pi\,\kappa\,T_{\mu\nu}\right\}\,\delta g^{\mu\nu}. \qquad (۷۹.۱)$$

این عبارت برای هر مقدار بی‌نهایت کوچکِ $\delta g^{\mu\nu}$ باید صفر شود. بنابراین، **معادلات اینشتین** به این صورت بدست می‌آید:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,R\,g_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,\Lambda\,g_{\mu\nu}=8\,\pi\,\kappa\,T_{\mu\nu}, \qquad (۸۰.۱)$$

که هندسه فضا-زمان را به انرژی مرتبط می‌کند.

در حالت خلاء $T_{\mu\nu}=0$ و $\Lambda=0$ است. بنابراین، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,R\,g_{\mu\nu}=0. \qquad (۸۱.۱)$$

با ضرب کردن $g^{\mu\nu}$ و استفاده از $g_{\mu\nu}\,g^{\nu\mu}=\delta^\mu_\mu=4$، در می‌یابیم که $R=0$، یعنی این معادله هم ارز با **شرط تخت بودن ریچی** است:

$$R_{\mu\nu}=0. \qquad (۸۲.۱)$$

توجه نمائید که این معادله **نباید** هم ارز با شرط صفر شدن انحنای فضا-زمان $R_{\mu\nu\alpha\beta}=0$ در نظر گرفته شود. در جواب‌های خلاءِ معادلات اینشتین معمولا ریچی تخت در نظر گرفته می‌شوند ، نه ریمانی تخت که فضا-زمان‌های خمیده را توصیف می‌کند.

مشتق هموردای D^ν را به دو طرف رابطه‌ی (۸۰.۱) اعمال می‌کنیم و از ثابت بودن هموردای تانسور متریک $D_\alpha g_{\mu\nu}=0$ استفاده کرده، رابطه زیر را می‌یابیم:

$$R^{\nu}_{\mu\,;\nu}-\frac{1}{2}\,\partial_\mu R=8\,\pi\,\kappa\,D^\nu T_{\mu\nu} \qquad (۸۳.۱)$$

با استفاده از نتیجه اتحاد بیانکی $R^{\nu}_{\mu\,;\nu}=\frac{1}{2}\,\partial_\mu R$، شرط پایستگی تانسور انرژی تکانه را می‌یابیم، $D^\nu T_{\mu\nu}=0$. پس، حتی اگر از ابتدا فرض نکنیم که $T_{\mu\nu}$ پایسته است، این شرط از معادلات اینشتین و اتحاد بیانکی حاصل خواهد شد.

این وضعیت شبیه به حالتی است که در معادلات ماکسول داشتیم. در واقع، اگر مشتق ∂^ν را به معادله‌ی

اعمال کنیم که $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ و j_ν چهار-بردار جریان است، شرط پایستگی $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi j_\nu$, $\partial^\mu j_\mu = 0$ ناشی از پادمتقارن بودن تانسور الکترومغناطیس $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ را خواهیم یافت. شرط پایستگی فقط شرط پایستگی بار است. اما، از نقطه نظر دینامیکی پایستگی تانسور انرژی تکانه معنایی بیش از پایستگی بردار الکتریکی دارد. نشان خواهیم داد که پایستگی $T_{\mu\nu}$ نشان‌گر معادلات حرکت ماده است.

برای مثال، تانسور انرژی تکانه‌ی غبار (ذرات آزاد بدون فشار) را فرض کنیم. تانسور انرژی به صورت $T_{\mu\nu}(x) = \rho(x)\, u_\mu(x)\, u_\nu(x)$ است که $\rho(x)$ چگالی انرژی غبار و $u^\mu(x)$ چهار-بردار میدان برداری است. شرط پایستگی انرژی چنین تانسوری به صورت زیر است:

$$0 = D^\mu \left(\rho\, u_\mu u_\nu\right) = \left(D^\mu \rho u_\mu\right)\, u_\nu + \rho\, u_\mu\, D^\mu u_\nu. \qquad (۸۴.۱)$$

با ضرب این معادله در u_ν و استفاده از $u_\nu u^\nu = 1$، یک تعمیم هموردایی بدست می‌آید، $D^\mu \left(\rho\, u_\mu\right) = 0$، که یک معادله پیوستگی جرم عادی است $\partial^\mu \left(\rho\, u_\mu\right) = 0$. به علاوه، به عنوان نتیجه معادله‌ی (۸۴.۱) بدست می‌آوریم که $u_\mu D^\mu u_\nu = 0$. که نتیجه پایستگی تانسور انرژی تکانه بدین معناست که ذرات غبار باید در امتداد خم‌های ژئودزی حرکت کنند. بنابراین، معادلات اینشتین الزاما معادلات حرکت دینامیکی ماده را نشان می‌دهند.

حال مثال‌های مختلفی از جفت شدگی ماده به گرانش یا مثال‌هایی از کنش S_M را نشان می‌دهیم. یک میدان اسکالر حقیقی ϕ فرض کنید. ساده‌ترین ناوردهایی که می‌توان نوشت بر حسب توان‌هایی از ϕ هستند. هم‌زمان، ساده‌ترین ناوردهایی که شامل مشتقاتی از ϕ عبارت است از $g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi$. به عنوان نتیجه ساده‌ترین کنش توصیف کننده‌ی جفت شدگی میدان اسکالر به گرانش به صورت زیر است:

$$S_M = \int d^4x\, \sqrt{|g|}\, \left[g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi - V(\phi)\right], \qquad (۸۵.۱)$$

که $V(\phi)$ یک چندجمله‌ای بر حسب ϕ است.

حال تعمیم فضا-زمان خمیده برای نظریه ماکسول را بررسی می‌کنیم. تعمیم هموردای ذاتی تانسور الکترومغناطیس هست:

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad (۸۶.۱)$$

می‌توان دید که این تانسور در عبور از فضا-زمان تخت به خمیده تغییر نمی‌کند. در نتیجه، تعمیم فضا-زمان

خمیده‌ی کنش ماکسول به صورت زیر است

$$S_M = \int d^4x \sqrt{|g|}\, F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}, \tag{۸۷.۱}$$

که بسط بدیهی کنش فضای تخت است.

۴.۱ حل شوارتزشیلد

یکی از ساده‌ترین جواب‌های معادلات اینشتین توسط شوارتزشیلد یافت شد. حل شوارتزشیلد یک هندسه‌ی متقارن کروی را وقتی که ثابت کیهان‌شناختی صفر باشد $\Lambda = 0$ در غیاب ماده، $T_{\mu\nu} = 0$توصیف می‌کند.

برای یافتن هندسه‌ی متقارن کروی راحت‌تر این است که از دستگاه مختصات کروی $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$ به جای کارتزی استفاده کنیم و عام‌ترین متریک کروی به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$ds^2 = g_{tt}(r,t)\, dt^2 + 2\, g_{tr}(r,t)\, dtdr + g_{rr}(r,t)\, dr^2 + k(r,t)\, d\Omega^2,$$

$$\text{که}\quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2, \quad \text{and} \quad r \in [0, +\infty) \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi]. \tag{۸۸.۱}$$

البته اگر دستگاه مختصات متفاوتی انتخاب شود، تقارن کروی از دست خواهد رفت، اما این نکته مهم است که تاکید کنیم یک دستگاه مرجع وجود دارد که در آن متریک شکل بالا را می‌گیرید. این شکل از متریک متقارن کروی است چون در لحظه‌ی مشخصی، $dt = 0$،، خود فضا به صورت یک پوست پیاز با کره‌هایی با شعاعی به شکل $g_{rr}(r,t)$ قطعه قطعه می‌شود و مساحت آن با $k(r,t)$ بیان می‌شود. در این‌جا $d\Omega^2$ متریک روی کره‌ای به شعاع واحد است.

شکل متریک (۸۸.۱) تحت تغییر مختصات دو بعدی ناوردا است: $t = t(\bar{r}, \bar{t})$ ، $r = r(\bar{r}, \bar{t})$. در واقع، :

$$\bar{g}_{ab}(\bar{x}) = g_{cd}(x)\, \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^a}\, \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^b}, \quad \text{and} \quad \bar{k}(\bar{x}) = k\left[x(\bar{x})\right],$$

$$\text{where} \quad x^a = (r,t), \quad a = 1, 2. \tag{۸۹.۱}$$

با استفاده از آزادی انتخاب دو تابعِ $r(\bar{r}, \bar{t})$ و $t(\bar{r}, \bar{t})$ ، می‌توان دو تا از چهار تابعِ $g_{tt}(r,t)$، $g_{tr}(r,t)$، $g_{rr}(r,t)$ و $k(r,t)$ را مشخص کرد. بدون از دست دادن کلیت در حالت متریک غیر تبهگن به سادگی می‌توان قرار دارد $g_{rt} = 0$ و $k(r,t) = -r^2$.

پس، با معرفی رسم‌الخط استاندارد $g_{tt} = e^{\nu(r,t)}$ و $g_{rr} = -e^{\lambda(r,t)}$، به رویکرد زیر برای معادلات اینشتین می‌رسیم:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}\, dt^2 - e^{\lambda(r,t)}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2. \tag{۹۰.۱}$$

باید توجه داشته باشیم که شکل این متریک تحت تبدیلات مختصه باقی‌مانده $t = t\,(\bar{t})$ ناوردا است. در واقع،

$$\bar{\lambda}\,(r,\bar{t}) = \lambda\,[r, t\,(\bar{t})] \quad \text{and} \quad \bar{\nu}\,(r,\bar{t}) = \nu\,[r, t\,(\bar{t})] + \log\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2. \tag{۹۱.۱}$$

پس، مؤلفه‌های غیر صفر زیر را برای متریک و معکوس آن داریم:

$$||g_{\mu\nu}|| = Diag\left(e^{\nu}, -e^{\lambda}, -r^2, -r^2\,\sin^2\theta\right), \quad ||g^{\mu\nu}|| = Diag\left(e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\right) \tag{۹۲.۱}$$

به طور سرراست می‌توان نشان داد که مؤلفه‌های غیر صفر نمادهای کریستوفل به قرار زیر هستند:

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\,\cos\theta, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2}\,e^{\lambda-\nu},\\ \Gamma^1_{22} = -r\,e^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2}\,e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r},\\ \Gamma^3_{23} = \cot\theta, \quad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2}, \quad \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma^1_{33} = -r\,\sin^2\theta\,e^{-\lambda}.\end{gathered} \tag{۹۳.۱}$$

در اینجا علامت پرایم $'$ بالای $\nu(t,r)$ و $\lambda(t,r)$ نماینده‌ی مشتق نسبت به r و علامت نقطه $\dot{}$ مشتق نسبت به زمان t را نشان می‌دهد.

در نتیجه، بخش غیر بدیهی معادلات اینشتین به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}8\,\pi\,\kappa\,T^1_1 &= -e^{-\lambda}\,\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2},\\ 8\,\pi\,\kappa\,T^2_2 = 8\,\pi\,\kappa\,T^3_3 &= -\frac{1}{2}\,e^{-\lambda}\,\left(\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\,\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}\,e^{-\nu}\,\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\,\dot{\nu}}{2}\right),\\ 8\,\pi\,\kappa\,T^0_0 &= -e^{-\lambda}\,\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2},\\ 8\,\pi\,\kappa\,T^1_0 &= -e^{-\lambda}\,\frac{\dot{\lambda}}{r}\end{aligned} \tag{۹۴.۱}$$

در این‌جا برای سادگی ادامه کار معادلات اینشتین را به شکل $R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\, R\, \delta^{\nu}_{\mu} = 8\,\pi\,\kappa\, T^{\nu}_{\mu}$ به کار برده‌ایم.
حال اگر، $T^{\mu}_{\nu} = 0$ باشد، همان‌طور که از ابتدا فرض کرده‌ایم، معادلات به شکل زیر تقلیل می‌یابند:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\, \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} &= 0, \\ e^{-\lambda}\, \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} &= 0, \\ \dot{\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{۹۵.۱}$$

معادلات مربوط به T^2_2 و T^3_3 در رابطه‌ی (۹۴.۱) از رابطه‌ی (۹۵.۱) می‌آیند.
حال می‌توان دید که در $\nu = \lambda = 0$ این معادله حل می‌شود. این حالت متناظر با متریک $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\, d\Omega^2$ است، که فضا-زمان تخت در مختصات کروی است.

از سویم معادله در رابطه‌ی (۹۵.۱) بلافاصله نتیجه می‌شود که $\lambda = \lambda(r)$ مستقل از زمان است. پس، با جمع کردن معادله‌ی اول و دوم در (۹۵.۱)، رابطه‌ی $\lambda' + \nu' = 0$ بدست می‌آید، که بدین معناست که $\lambda + \nu = g(t)$. با استفاده از آزادی (۹۱.۱) می‌توان این تابع را با تغییر مناسب $\nu(t, r)$ صفر کرد. در نتیجه، بدست می‌آید $\nu = -\lambda(r)$.

در نهایت، حل معادله‌ی (۹۵.۱) بدست می‌دهد:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{C_2}{r}, \tag{۹۶.۱}$$

که C_2 ثابتی است که مشخص خواهیم کرد. وقتی $r \to \infty$ به متریک فضا-زمان تخت خواهیم رسید:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{C_2}{r}\right)\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{C_2}{r}} - r^2\, d\Omega^2 \longrightarrow dt^2 - dr^2 - r^2\, d\Omega^2. \tag{۹۷.۱}$$

در واقع، در واقع، بر اساس درک فیزیکی می‌توان نتیجه گرفت که هندسه مورد بحث توسط یک جرم سنگین با تقارن کروی در بیرون ایجاد شده است، یعنی در آن ناحیه از فضا-زمان که $T_{\mu\nu}(x) = 0$ است. بنابراین طبیعی است که انتظار داشته باشیم که در بی‌نهایت فضا تخت باشد، یعنی اثر گرانشی جرم مرکزی ناچیز باشد. متریک‌های کلی که از چنین شرطی پیروی می‌کنند به عنوان متریک‌ها **مجانبی تخت** نامیده می‌شوند. (تعریف دقیق این مجانبی تخت بودن فضا-زمان دشوار است و در این‌جا بحث نخواهیم کرد.)
بنابراین، متریک مجانبی تخت، و متقارن کروی در خلاء، ایستا و مستقل از زمان و قطری است. این الزام **قضیه‌ی بیرهوف** است. این قضیه مشابه پیچیده‌تر قضیه‌ای است که در نظریه ماکسول حل‌های متقارن کروی که در بی‌نهایت به صفر میل می‌کنند، الزاما ایستا هستند.

برای یافتن مقدار C_2 در رابطه‌ی (۹۷.۱) یک ذره‌ی آزمون را در نظر بگیرید که در پس زمینه حرکت می‌کند. فرض کنیم ذره غیر نسبیتی باشد و بسیار دور از جرم مرکزی حرکت کند. پس، از مکانیک کلاسیک می‌دانیم که کنش چنین ذره‌ای باشد باشد:

$$S \approx -m \int \left[1 - \frac{\dot{\vec{z}}^2}{2} + V\left(|\vec{z}|\right)\right] \, dt, \tag{۹۸.۱}$$

که $V\left(|\vec{z}|\right) = V(r)$ پتانسیل نیوتنی است $V(r) = -\frac{\kappa M}{r}$، M ، و M جرم گرانشی در مرکز و $1 \gg \left|\dot{\vec{z}}\right|$ سرعت ذره است. هم‌زمان می‌دانیم که $S = -m \int ds$ است. بنابراین، رابطه‌ی تقریبی زیر را می‌توان نوشت:

$$ds \approx \left[1 - \frac{\dot{\vec{z}}^2}{2} + V\left(r\right)\right] \, dt, \quad \text{as} \quad r \to \infty \quad \text{and} \quad \left|\dot{\vec{z}}\right| \ll 1. \tag{۹۹.۱}$$

پس، در مرتبه‌ی خطی بر حسب $\dot{\vec{z}}^2$ و $V(r)$ داریم

$$ds^2 \approx \left[1 + 2\,V(r)\right] \, dt^2 - \dot{\vec{z}}^2 \, dt^2 = \left[1 + 2\,V(r)\right] \, dt^2 - d\vec{z}^2, \quad \text{as} \quad r \to \infty. \tag{۱۰۰.۱}$$

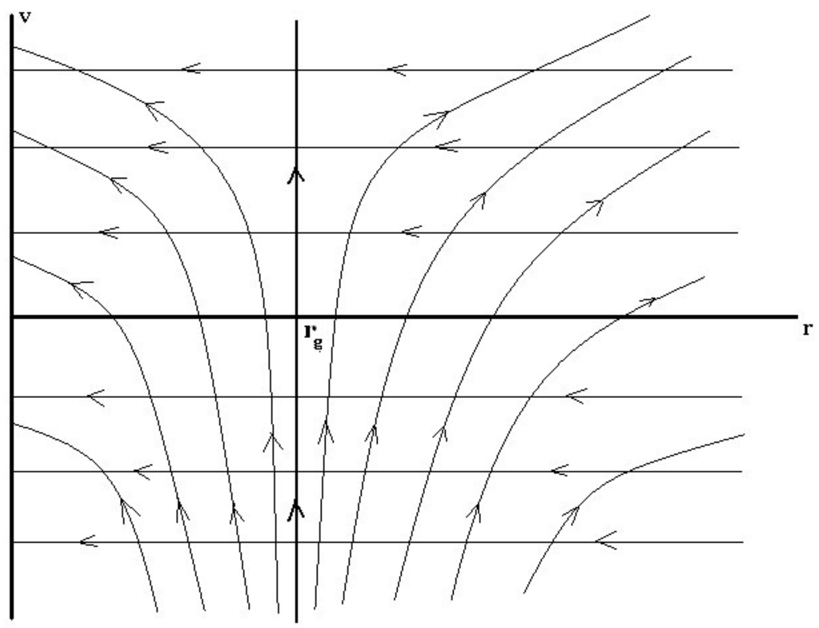
در نتیجه برای حد میدان ضعیف، $r \to \infty$، باید بدست آوریم:

$$g_{tt} \approx 1 + 2\,V(r) = 1 - \frac{2\,\kappa\,M}{r}, \tag{۱۰۱.۱}$$

یعنی از رابطه‌ی (۹۷.۱) نتیجه می‌شود $C_2 = -2\,\kappa\,M$.
در مجموع، **حل شوارتزشیلد** معادلات اینشتین را به شکل زیر یافته‌ایم:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 \, d\Omega^2, \quad \text{که} \quad r_g \equiv 2\,\kappa\,M. \tag{۱۰۲.۱}$$

که r_g به عنوان **شعاع گرانشی** برای جرم M است.
متریک (۱۰۲.۱) تحت انتقال زمانی $t \to t + const$ و معکوس زمان $t \to -t$ ناوردا است. قطعات زمانی، $dt = 0$، برای این متریک خودشان توسط کره‌های ایستا جدا شده‌اند. در نتیجه، خم‌های متناظر با $dr = d\theta = d\varphi = 0$ جهان‌خط‌های نالخت ناظرهایی هستند که با گرانش مرکزی ثابت شده‌اند. دقت نمایید که فاصله فیزیکی بین دو نقطه (r_1, θ, φ) و (r_2, θ, φ) با رابطه‌ی $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \neq r_2 - r_1$ داده می‌شود. تنها در حد $r_{1,2} \to \infty$ رابطه فاصله ممکن است تقریبا برابر شود.
متریک (۱۰۲.۱) وقتی $r \to r_g$ تبهگن می‌شود: در واقع، $g_{tt} \to 0$ و $g_{rr} \to \infty$. این تکینگی متریک



شکل ۸.۱:

از نوع مختصه (غیر فیزیکی) است. مشابه تکینگی متریک ریندلر در $\rho = 0$. بنابراین مختصات شوارتزشیلد r و t فقط برای $r > r_g$ قابل استفاده هستند.

در واقع، هیچ یک از ناوردها، که از این متریک می‌توان ساخت در $r = r_g$ تکین نیستند. برای مثال، ساده‌ترین ناوردا- حجم- برابر است با $d^4x\sqrt{|g|} = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \, dt$ و در $r = r_g$ مشکلی ندارد. اسکالر ریچی این متریک صفر است، همانطور که از معادلات اینشتین نتیجه می‌شود. می‌توان دیگر ناورداها را از تانسور ریمان ساخت. مؤلفه‌های غیر صفر این تانسور برای متریک شوارتزشیلد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \frac{r_g}{r^3}, \quad R_{0202} = \frac{R_{0303}}{\sin^2\theta} = -\frac{r_g\ (r - r_g)}{2\, r^2}, \\ R_{1212} &= \frac{R_{1313}}{\sin^2\theta} = \frac{r_g}{2\ (r - r_g)}, \quad R_{2323} = -r_g\, r\ \sin^2\theta. \end{aligned} \tag{۱۰۳.۱}$$

دیگر مؤلفه‌های غیر صفر $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ با جایگشت‌های اندیس‌های (۱۰۳.۱) مطابق با تقارن‌های این تانسور بدست می‌آیند. به راحتی می‌توان نشان داد که ناوردای زیر وجود دارد:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12\, r_g^2}{r^6}, \tag{۱۰۴.۱}$$

که در $r = r_g$ خوش رفتار است.

راه دیگر برای اینکه ببینیم فضا-زمان (۱۰۲.۱) در $r = r_g$ خوش رفتار است تبدیل کردن مختصات به

تانسور متریکی است که در آن این سطح خوش رفتار باشد. بیایید به صورت زیر تبدیل مختصات انجام دهیم:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2\, d\Omega^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2}\right] - r^2\, d\Omega^2 =$$
$$= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[dt^2 - dr_*^2\right] - r^2\, d\Omega^2 \qquad (۱۰۵.۱)$$

در اینجا **مختصه‌ی کندرو** r_* را معرفی می‌کنیم:

$$dr_* = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad \text{and} \quad r_* = r + r_g \log\left(\frac{r}{r_g} - 1\right). \qquad (۱۰۶.۱)$$

ثابت انتگرال‌گیری در رابطه‌ی بین این مختصه r_* ، و شعاع r را مشخص کرده‌ایم. بنابراین وقتی $r \to \infty$ داریم $r_* \approx r$ و همچنین وقتی $r \to r_g$ داریم $r_* \to -\infty$.

حال، اگر تبدیل $v = t + r_*$ و تبدیل‌های از (t, r) به (v, r) در رابطه‌ی (۱۰۵.۱) را معرفی کنیم، فضا-زمان شوارتزشیلد در **مختصات ورودی ادینگتون-فینکلشتاین**[۲] به صورت زیر در می‌آید:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dv^2 - 2\, dv\, dr - r^2\, d\Omega^2. \qquad (۱۰۷.۱)$$

شکل بدست آمده برای تانسور متریک در نقطه‌ی $r = r_g$ تکین نیست و می‌تواند تا $r \leq r_g$ گسترش یابد.

در مختصات ادینگتون-فینکشتاین ناوردای (۱۰۴.۱) شکل یکسانی دارد. بنابراین، مشاهده می‌کنیم که فضا-زمان شوارتزشیلد یک تکینگی فیزیکی در $r = 0$ دارد، یعنی فضا-زمان مورد بحث تنها در ورای $r = 0$ معنای فیزیکی دارد. به علاوه، طبیعی است که انتظار داشته باشیم نظریه‌ی اینشتین با نزدیک شدن به نقطه $r = 0$ جایی که انحنا بسیار بزرگ می‌شود فرو بپاشد.

حال رفتار ژئودزی نورگونه در متریک (۱۰۷.۱) را بررسی کنیم. در فضا-زمان تخت پرتوهای نور طبق قانونی که $ds = 0$ است حرکت می‌کنند. در همسایگی هر نقطه‌ای در یک فضا-زمان خمیده بهصورت موضعی تقریبا تخت به نظر می‌رسد. بنابراین، در فضا-زمان خمیده پرتوهای نور طبق قانون $ds = 0$ حرکت می‌کنند همچنان. پس، برای پرتوهای نور شعاعی داریم $ds = 0$ و $d\theta = d\varphi = 0$. پس از رابطه‌ی (۱۰۷.۱) خواهیم داشت

$$\left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dv - 2\, dr\right] dv = 0. \qquad (۱۰۸.۱)$$

[2] Eddington-Finkelstein

از $dv = 0$ بدست می‌آید که برای پرتوهای نور ورودی $v \equiv t + r_* = const$. آن‌ها پرتوهای ورودی هستند چرا که وقتی $t \to +\infty$ باید $r_* \to -\infty$ تا $v = const$ را حفظ کنیم. هم‌زمان، از رابطه‌ی $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dv = 2\,dr$ پرتوهای خروجی بدست می‌آید. آن‌ها واقعا رو به بیرون هستند (با افزایش زمان $r \to +\infty$) تنها وقتی که $r > r_g$ باشد. این پرتوهای نور به سمت $r \to 0$ می‌روند وقتی که $r < r_g$ باشد. تصویر حاصل از این توضیحات در شکل (۸.۱) نشان داده شده است. خطوط نازک ژئودزی‌های نورگونه هستند. پیکان‌های روی این خطوط نشان‌دهنده‌ی جهت پرتوی انتشاری وقتی که در زمان جلو برویم هستند. خط قائم $r = r_g$، $dr = 0$ روی شکل (۸.۱) یکی ژئودزی‌های نورگونه است.

۵.۱ نمودارهای پنروز و مختصات کروسکال-زکرس

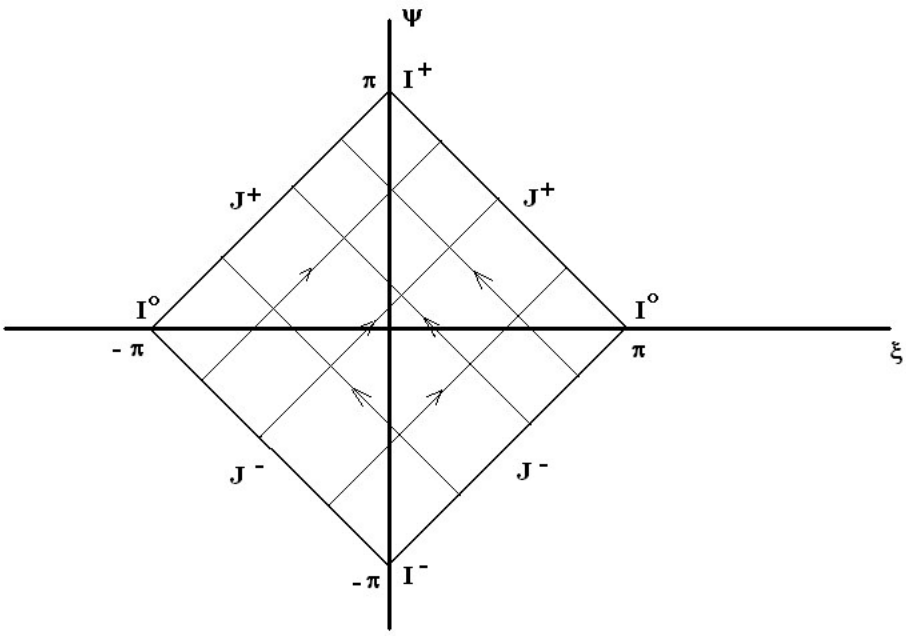
در این بخش درباره ویژگی‌های حل شوارتزشیلد در نمودار پنروز-کارتر بحث می‌کنیم. ایده چنین دیاگرامی انتخاب بخش دو بعدی از یک فضا زمان تحت ملاحظات خاصی است تا یک تصویر استریوگرافیک روی یک فضای فشرده ایجاد کنیم. برای فضاهای دو-بعدی چنین تصویر کردنی همواره از طریق نقشه‌های همدیس میسر است. در واقع، یک تانسور متریک دو بعدی ، که یک ماتریس متقارن ۲ در ۲ است، ۳ مؤلفه‌ی مستقل دارد. دو تا از این مؤلفه‌ها با استفاده از تبدیلات مختصات می‌توانند مشخص شوند. در نتیجه هر متریک دو بعدی $R^{1,1}$ به شکل زیر می‌تواند تبدیل شود

$$g_{ab} = \omega^2(x)\,\eta_{ab}, \quad a = 1, 2$$

در این‌جا ضریب $\omega^2(x)$ یک تابع وابسته به فضا-زمان است، که به نام ضریب همدیس شناخته می‌شود. بایستی مطمئن شد که مختصه‌های متناظر x^a، در یک بازه فضای فشرده مقدار می‌پذیرند.

نکته اصلی نهفته در نمودارهای پنروز-کارتر این است که تحت نقشه‌های همدیس جهان‌خط‌های نورگونه و زوایای بین آن‌ها تغییر نمی‌کنند. در نتیجه می‌توان به وضوح دید ویژگی‌های علی فضا-زمان اصلی را در نمودار فشرده پنروز-کارتان دید. عیب چنین نمودارهایی آن است که برای رسم آن‌ها باید تمام فضا-زمان طی کل تاریخچه آن را بدانیم، که در وضعیت‌های فیزیکی معمول غیر ممکن است. به علاوه نمودارهای پنروز-کارتر تنها به ساختار سرتاسری فضا-زمان حساس هستند.

برای نمایش این نکات بیایید نمودار پنروز-کارتر را برای فضا-زمان مینکوفسکی رسم کنیم. متریک مینکوفسکی را به شکل $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ نمایش می‌دهیم. با انتخاب بخش (t, x) از این فضا-زمان تبدیل $t \pm x = \tan\left(\frac{\psi \pm \xi}{2}\right)$ را انجام می‌دهیم. در این‌جا اگر $t, x \in (-\infty, +\infty)$ باشد، پس $\psi, \xi \in [-\pi, \pi]$. تحت یک چنین تبدیل مختصاتی متریک مینکوفسکی به شکل زیر در می‌آید



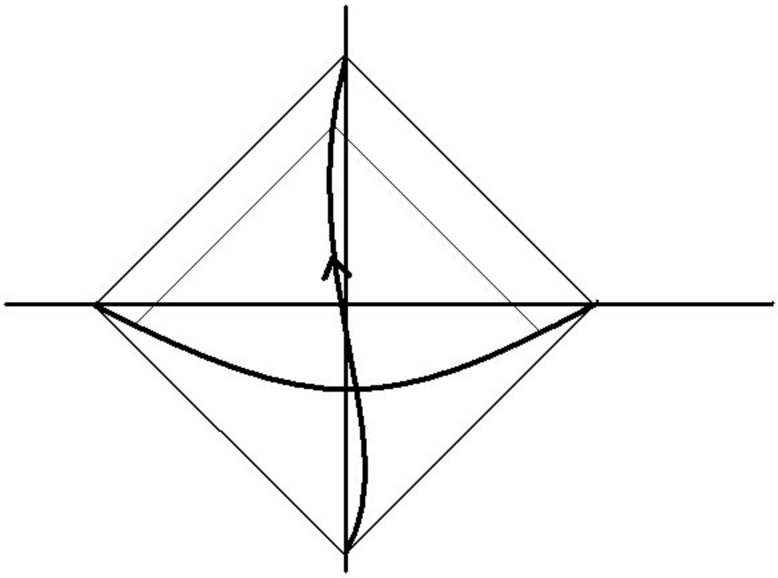
شکل ۹.۱:

$$dt^2 - dx^2 = \frac{1}{\left[2\,\cos\left(\frac{\psi+\xi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\psi-\xi}{2}\right)\right]^2}\,\left[d\psi^2 - d\xi^2\right]. \qquad (۱۰۹.۱)$$

ضریب همدیس متریک جدید یعنی $\left[\frac{1}{2\,\cos\left(\frac{\psi+\xi}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi-\xi}{2}\right)}\right]^2$ ، در $|\psi \pm \xi| = \pi$ واگرا می‌شود، که این موجب می‌شود مرز در فضا-زمان فشرده (ψ, ξ) بی‌نهایت دور از هر نقطه درونی آن باشد. این امر اجازه می‌دهد که فضا-زمان فشرده (ψ, ξ) را به فضا-زمان غیر فشرده (t, x) تصویر کنیم.

به علاوه، می‌توان دید که برابری $d\psi^2 - d\xi^2 = 0$ دلالت بر این دارد که $dt^2 - dx^2 = 0$ و بالعکس. بنابراین، ضریب همدیس در مطالعه‌ی ویژگی‌های جهان‌خط‌های نورگونه غیر مرتبط است. در فضا زمان (ψ, ξ) جهان‌خط‌های نورگونه زوایای ۴۵ درجه نسبت به محورهای ψ و ξ ایجاد می‌کنند. حال ضریب همدیس را چشم‌پوشی می‌کنیم و فضا زمان فشرده (ψ, ξ) را رسم می‌کنیم. در شکل (۹.۱) این نمودار نمایش داده شده است.

در این نمودار پرتوهای نورگونه با خطوط نازک صاف نشان داده شده‌اند. پیکان‌ها نماینده‌ی جهت انتشار نور هستند، و زمان t از گذشته به آینده می‌رود. همچنین در این نمودار علامت $I^\pm$ نماینده‌ی کل فضا است، در $t = \pm\infty$ داریم $x \in (-\infty, +\infty)$. این‌ها بی‌نهایت‌های آینده و گذشته‌ی فضاگونه هستند. همچنین I^0 کل زمان خط است، در $x = \pm\infty$ داریم $t \in (-\infty, +\infty)$ یعنی بی‌نهایت فضایی زمان گونه است. و سرآخر $J^\pm$



شکل ۱۰.۱:

بی‌نهایت‌های آینده و گذشته‌ی نورگونه هستند، در واقع این‌ها منحنی‌هایی هستند که جهان‌خط‌های نورگونه آغاز و پایان می‌یابند.

دلیل این‌که چرا پس از تصویر کردن استریوگرافیک صفحه‌ی دو بعدی یک مربع بدست می‌آید و نه یک کره به رد مینکوفسکی آن بر می‌گردد. در ردِ متریک اقلیدسی همه نقاط در بی‌نهایتِ صفحه غیر قابل تمایز هستند و ، بنابراین، تصویر کردن به یک تک قطب شمالی کره، در حالت ردِ متریک مینکوفسکی بخش‌های مختلف در بی‌نهایت ویژگی‌های متفاوت دارند. می‌توانند هم فضاگونه، زمان‌گونه یا نورگونه باشند.

حال بیاید ویژگی‌های علیِ فضا زمان مینکوفسکی در نمودار بدست آمده را بررسی کنیم. شکل (۱۰.۱) را در نظر بگیرید. در این شکل جهان‌خط زمان‌گونه‌ی یک ناظر یا یک ذره جرم‌دار را نشان داده‌ایم. خط عمودی پیچ‌خورده نمایانگر همین جهان‌خط است. همچنین در شکل (۱۰.۱) یک سطح کوشی فضا گونه- یک صفحه با برش زمان ثابت- را نیز نمایش داده‌ایم. خط پیچ‌خورده‌ی افقی این سطح را نشان می‌دهد. از این شکل می‌توان دریافت که هر ناظر در این فضا زمان می‌تواند کل بخش‌های فضا گونه را با حرکت به سمت بی‌نهایت ببیند. بنابراین، در فضا زمان مینکوفسکی هیچ ناحیه‌ای که به صورت علی با دیگر نواحی بی ارتباط باشد نداریم. در ادامه خواهیم دید که وضعیت در حالت فضا زمان شوارتزشیلد کاملا متفاوت است.

قبل از رسم نمودار پنروز-کارتر برای فضا زمان شوارتزشیلد می‌بایست مختصاتی را بیابیم که آن را بطور کامل پوشش دهد. مختصات شوارتزشیلد (t, r) باید فقط یک بخش از کل فضا زمان را پوشش دهد. از این جنبه شبیه به مختصات ریندلر هستند.

برای یافتن مختصاتی که کل فضا زمان را شامل شود باید آن را به صورت یک ابر صفحه درون یک فضای

مینکوفسکی ابعاد بالاتر جای دهیم. در اصل، می‌توان چنین مختصاتی که کل ابر صفحه را پوشش دهد می‌توان یافت، پس، این مختصات کل فضا زمان خمیده‌ی اصلی را پوشش می‌دهد.

در هر نقطه از یک فضا زمان چهار-بعدی ، متریک آن یک تانسور دو بعدی متقارن است، که باید $10 = \frac{4(4+1)}{2}$ مؤلفه‌ی مستقل داشته باشد. از این‌جا می‌توانیم چهار درجه آزادی را بر اساس چهار تبدیل مختصه $\bar{x}^{\mu}(x)$ کم کنیم. بنابراین، ۶ درجه آزادی مستقل از هم در هر نقطه داریم. پس، هر فضا زمان چهار-بعدی دلخواه می‌تواند به طور موضعی به عنوان یک ابر صفحه چهار-بعدی درون یک فضا زمان مینکوفسکی $(4+6)$-بعدی ، به همراه یک تصویرگری با ویژگی‌های مناسب جای‌سازی شود.

اما، اگر یک فضا زمان خمیده تقارن‌های اضافی داشته باشد، می‌توان آن را درون یک فضای تخت با ابعاد کمتر از ۱۰ بعد جا سازی کرد. برای مثال، فضا زمان شوارتزشیلد، که کاملا متقارن است، می‌تواند در یک فضای تخت ۶-بعدی جا سازی شود. این جا سازی با استفاده از مختصات کروسکال-زکرس انجام می‌شود.

برای نشان دادن نحوه عملکرد این مختصات حال از متریک آغاز می‌کنیم

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\,\left(dt^2 - dr_*^2\right) - r^2\,d\Omega^2, \qquad (۱۱۰.۱)$$

که تعریف کرده‌ایم

$$r_* = r + r_g\,\log\left(\frac{r}{r_g} - 1\right). \qquad (۱۱۱.۱)$$

۶.۱　متریک کر-نیومان

متریک کر-نیومان جواب معادلات اینشتین-ماکسول است که توصیف‌کننده‌ی هندسه فضا زمان در ناحیه‌ای است که یک جرمِ باردارِ چرخان قرار دارد. این جواب از نظر اخترفیزیکی چندان کاربردی نیست، چرا که جرمی مشاهده نشده که دارای بار الکتریکی قابل توجهی باشد.

متریک کر-نیومان توصیف کننده‌ی هندسه‌ی فضا زمان یک سیاه‌چاله‌ی به جرم M و بار Q و تکانه‌ی زاویه‌ای J است. رابطه‌ی متریک کر-نیومان بستگی به مختصات انتخابی دارد. اگر نوع خاصی از مختصات کروی، که مختصات بویر-لیندکوئیست نامیده می‌شود نمایش دهیم به شکل زیر در می‌آید:

$$ds^2 = -\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right)\rho^2 + \left(cdt - a\sin^2\theta d\phi\right)^2\frac{\Delta}{\rho^2} - \left(\left(r^2+a^2\right)d\phi - acdt\right)^2\frac{\sin^2\theta}{\rho^2} \qquad (۱۱۲.۱)$$

که پارامترهای زیر را تعریف کرده‌ایم

$$a = \frac{J}{Mc}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2 + r_Q^2$$

که شعاع شوارتزشیلد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

مقیاس طول متناظر با بار Q به صورت زیر تعریف می‌شود

$$r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$$

جرم معادل این سیاه‌چاله که شامل انرژی میدان الکتریکی و انرژی دورانی و جرم غیر قابل تقلیل M_{irr} است با رابطه‌ی زیر به هم مربوط هستند

$$M = \sqrt{\frac{16M_{\text{irr}}^4 + 8M_{\text{irr}}^2 r_Q^2 c^4/G^2 + r_Q^4 c^8/G^4}{16M_{\text{irr}}^2 - 4a^2c^4/G^2}} \tag{۱۱۳.۱}$$

طبق هم ارزی جرم-انرژی ، معادل انرژی الکتریکی و دورانی می‌توان جرم نسبت داد و در نتیجه جرم کل M همواره بزرگتر از جرم غیر قابل تقلیل M_{irr} است. اگر برای مثال انرژی دورانی یک سیاه‌چاله از طریق فرآیندهای پنروز از آن بیرون کشیده شود، جرم- انرژی باقی‌مانده همواره بزرگتر یا مساوی جرم M_{irr} است.

۱.۶.۱ تانسور میدان الکترومغناطیس

پتانسیل الکترومغناطیسی در مختصات بویر-لیندکوئیست می‌شود

$$A_\mu = \left(\frac{r r_Q}{\rho^2}, 0, 0, -\frac{c^2 a r r_Q \sin^2\theta}{\rho^2 GM}\right) \tag{۱۱۴.۱}$$

۲.۶.۱ افق رویداد و ارگوسفر

با برابر صفر قرار دادن مؤلفه‌ی g_{rr} افق‌های رویداد داخلی و خارجی را در مختصات بویر-لیندکوئیست بدست می‌آوریم

$$r_H^{\pm} = \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{\frac{r_s^2}{4} - a^2 - r_Q^2} \qquad (۱۱۵.۱)$$

با صفر قرار دادن مؤلفه‌ی g_{tt} ارگوسفر داخلی و خارجی بدست می‌آید

$$r_E^{\pm} = \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{\frac{r_s^2}{4} - a^2 \cos^{\theta} - r_Q^2} \qquad (۱۱۶.۱)$$

۷.۱ متریک راینسر-نوردشتروم

در نسبیت عام یکی از حل‌های ایستای معادله میدان اینشتین متریک رایسنر-نوردشتروم است که هندسه‌ی فضا زمان حول یک سیاه‌چاله غیر چرخان ولی باردار را توصیف می‌کند. در واقعیت، یک سیاه‌چاله به شدت باردار به سرعت توسط بر اثر برهمکنش با ماده‌ی اطراف خنثی می‌شود، و در نتیجه چنین جوابی از معادلات میدان خیلی مرتبط با وضعیت واقعی اخترفیزیکی نیست. اما، سیاه‌چاله‌های باردار تعدادی از ویژگی‌های مهم حالت‌های کلی را نمایان می‌کنند و از این جنبه دارای اهمیت هستند. برای بدست آوردن متریک RN فرض می‌کنیم تک‌قطبی‌های مغناطیسی نیز مانند بار الکتریکی وجود دارند. همچنین باید معادلات اینشتین-ماکسور را حل کنیم. چون تقارن کروی داریم، از قضیه‌ی بیرهوف شکل متریک در مختصات کروی ۴- بعدی t, r, θ, ϕ به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (۱۱۷.۱)$$

که بخشی از متریک روی دو-کره‌ی واحد به صورت زیر تعریف شده:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \qquad (۱۱۸.۱)$$

معادله میدان اینشتین به شکل زیر است

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (۱۱۹.۱)$$

در این حالت تانسور انرژی مورد نظر از الکترومغناطیس می‌آید

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \qquad (۱۲۰.۱)$$

که $F_{\mu\nu}$ تانسور شدت میدان در الکترومغناطیس است. رد تانسور انرژی الکترومغناطیس صفر است

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = 0 \qquad (۱۲۱.۱)$$

در ۴-بعد داریم $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$. معادله (۱۲۱.۱) به ما امکان بازنویسی معادله اینشتین را به شکل زیر می‌دهد

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (۱۲۲.۱)$$

در نتیجه، معادلات ماکسور به صورت زیر می‌توانند نوشته شوند

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}F_{\nu\sigma} = 0 \qquad (۱۲۳.۱)$$

$$\nabla_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0 \qquad (۱۲۴.۱)$$

۱.۷.۱ مؤلفه‌های تانسور شدت میدان الکترومغناطیس

از آن‌جا که تقارن کروی داریم، تنها مؤلفه‌های غیر صفر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مؤلفه‌های شعاعی هستند که باید مستقل از θ و ϕ باشند. بنابراین مؤلفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی به صورت زیر در می‌آید

$$E_r = F_{tr} = -F_{rt} = f(r,t) \qquad (۱۲۵.۱)$$

برای مؤلفه میدان مغناطیسی از نماد لوی-چیویتا $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\sigma\rho}$ استفاده می‌کنیم. از آن‌جا که $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\sigma\rho}$ تانسور نیست و چگالی تانسوری است، تانسور لوی-چیویتا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = \sqrt{|g|}\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\sigma\rho} \qquad (۱۲۶.۱)$$

که $g = \det g_{\mu\nu}$ است. دقت داشته باشید که تانسور متریک می‌تواند روی اندیس‌های $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ اثر کند نه روی $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\sigma\rho}$. حال به سراغ یافتن میدان مغناطیسی می‌رویم. مؤلفه‌ی شعاعی میدان مغناطیسی هست

$$\begin{aligned} B_r &= g_{11}\epsilon^{01\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{g_{11}}{\sqrt{|g|}}\tilde{\epsilon}^{01\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \frac{g_{11}}{\sqrt{|g|}}\left(\tilde{\epsilon}^{0123}F_{23} + \tilde{\epsilon}^{0132}F_{32}\right) = \frac{2g_{11}}{\sqrt{|g|}}F_{\theta\phi} \end{aligned} \tag{۱۲۷.۱}$$

از رابطه‌ی (۱۱۷.۱) مشاهده می‌کنیم که $g_{11} = g_{rr}(r,t)$ و $|g| \propto r^4\sin^2\theta$ و چون B_r وابستگی زاویه‌ای ندارد، $F_{\theta\phi}$ باید به شکل زیر باشد

$$F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = g(r,t)r^2\sin\theta \tag{۱۲۸.۱}$$

بقیه مؤلفه‌های باقی‌مانده تانسور شدت میدان الکترومغناطیس یا صفر هستند یا از طریق تقارن‌ها به این دو مؤلفه مرتبطند. بنابراین تانسور شدت میدان الکترومغناطیس به صورت زیر خواهد شد

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f(r,t) & 0 & 0 \\ -f(r,t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g(r,t)r^2\sin\theta \\ 0 & 0 & -g(r,t)r^2\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{۱۲۹.۱}$$

۲.۷.۱ مؤلفه‌های تانسور ریچی و تانسور انرژی

برای حل معادلات اینشتین باید هموستارهای کریستوفل، تانسور ریمان را حساب کرد تا به تانسور ریچی رسید که این کار وقت‌گیری است. در این‌جا ما فقط مؤلفه‌های تانسور ریچی را می‌نویسیم

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \left[\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta\right] + e^{2(\alpha-\beta)}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right] \\ R_{rr} &= -\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta - \frac{2}{r}\partial_r\beta\right] + e^{2(\beta-\alpha)}\left[\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta\right] \\ R_{tr} &= \frac{2}{r}\partial_t\beta \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta}\left[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1\right] + 1 \\ R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta}\sin^2\theta \end{aligned} \tag{۱۳۰.۱}$$

مؤلفه‌های تانسور انرژی نیز به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned}
T_{tt} &= \frac{f(r,t)^2}{2}e^{-2\beta(r,t)} + \frac{g(r,t)^2}{2}e^{2\alpha(r,t)}\\
T_{rr} &= -\frac{f(r,t)^2}{2}e^{-2\alpha(r,t)} - \frac{g(r,t)^2}{2}e^{2\beta(r,t)}\\
T_{tr} &= 0\\
T_{\theta\theta} &= \frac{r^2 g(r,t)^2}{2} + \frac{r^2 f(r,t)^2}{2}e^{-2(\alpha(r,t)+\beta(r,t))}\\
T_{\phi\phi} &= T_{\theta\theta}\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{۱۳۱.۱}$$

از معادلات بالا نتیجه می‌شود که $R_{tr}=0$ که می‌دهد $\beta=\beta(r)$. با استفاده از این و استفاده از مؤلفه میدان الکتریکی داریم $e^{2\alpha(r,t)}R_{rr}+e^{2\beta(r)}R_{tt}=0$ از حل این عبارت بدست می‌آید $\alpha(r,t)+\beta(r)=\text{const.}$. اما می‌توانیم مؤلفه‌ی زمان را با تغییر متغیر $dt\to e^{\text{const}}dt$ چنین تعریف کنیم که

$$\alpha(r,t)=\alpha(r)=-\beta(r) \tag{۱۳۲.۱}$$

۳.۷.۱ حل معادلات ماکسول

حال به سراغ حل معادلات ماکسول می‌رویم. برای مؤلفه‌ی r معادله ماکسول می‌شود

$$\partial_t F_{tr} - \Gamma^{\alpha}_{tt}F_{\alpha r} - \Gamma^{\alpha}_{tr}F_{t\alpha} = 0$$

یا با جمع زدن روی α داریم

$$\partial_t F_{tr} - F_{tr}\left(\Gamma^r_{tt}+\Gamma^r_{tr}\right)=0$$

چون متریک قطری است، β به زمان وابسته نیست، $\Gamma^t_{tt}=0$ و $\Gamma^r_{tr}=\partial_t\beta=0$ و از معادله‌ی بالا داریم $\partial F_{tr}=0$ که حاکی از این است که مؤلفه‌ی tr تانسور شدت میدان الکترومغناطیس وابسته به زمان نیست:

$$F_{tr}=f(r) \tag{۱۳۳.۱}$$

برای یافتن شکل صریح f ، از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم: برای هر تانسور دوتایی پادمتقارنِ $T^{\mu\nu}$ ، و

متریک قطری اتحاد زیر برقرار است

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}T^{\mu\nu}) \qquad (۱۳۴.۱)$$

برای متریک مورد نظر داریم $\sqrt{|g|} = r^2\sin\theta$. اگر از شرط سازگاری متریک استفاده کنیم تا اندیس را بالا بیاوریم و اتحاد بالا را بکار بریم بدست می‌آید:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\mu(r^2\sin\theta F^{\mu\nu}) = 0 \qquad (۱۳۵.۱)$$

برای مؤلفه‌ی t داریم $\partial_r(r^2F^{rt}) = \partial_r(r^2g^{rr}g^{tt}F_{rt}) = \partial_r(r^2f) = 0$ یا به شکل زیر

$$f(r) = \frac{\mathrm{const}}{r^2} \qquad (۱۳۶.۱)$$

از قضیه گاوس برای شار الکتریکی مقدار ثابت بدست می‌آید $\mathrm{const} = \mathrm{Q}/\sqrt{4\pi}$ که Q بار الکتیکی سیاه‌چاله است. حالا $g(r,t)$ که مرتبط با میدان مغناطیسی است را می‌یابیم. معادله ماکسول به شکل زیر در می‌آید

$$\nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} = 0 \qquad (۱۳۷.۱)$$

اگر معادله‌ی بالا را باز کنیم، همه جملات شامل هموستارها حذف می‌شوند و این باقی می‌ماند

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \qquad (۱۳۸.۱)$$

با فرض $\mu = t$ ، $\nu = \phi$ و $\rho = \theta$ و استفاده از $F_{\theta t} = F_{t\phi} = 0$ ، بدست می‌آوریم $\partial_t F_{\theta\phi} = 0$ که بدین معناست که $g(r,t)$ مستقل از زمان است. همین کار را با $\mu = r$ ، $\nu = \theta$ و $\rho = \phi$ اگر انجام دهیم به $\partial_r F_{286} = 0$ یا $\partial_r(r^2g(r)) = 0$ می‌رسیم. بنابراین داریم

$$g(r,t) = \frac{\mathrm{const}}{r^2} \qquad (۱۳۹.۱)$$

که شبیه به بار الکتریکی است،که با اعمال قضیه گاوس به میدان مغناطیسی داریم $\mathrm{const} = \mathrm{P}/\sqrt{4\pi}$ که P

بار مغناطیسی کلِ سیاه‌چاله است. سرانجام برای، تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی بدست می‌آوریم

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 & Qr^{-2} & 0 & 0 \\ -Qr^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P\sin\theta \\ 0 & 0 & -P\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{۱۴۰.۱}$$

۴.۷.۱ متریک رایسنر-نوردشتروم

حال تنها تابع مجهولمان $\alpha(r)$ است. بیایید مؤلفه‌ی $\theta\theta$ از معادله اینشتین را در نظر بگیریم

$$R_{\theta\theta} = 8\pi T_{\theta\theta} \tag{۱۴۱.۱}$$

با جایگذاری تانسور ریچی و تانسور انرژی از معادلات قبل بدست می‌آید

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1 - \frac{G}{r^2}(Q^2 + P^2) \tag{۱۴۲.۱}$$

یا

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{R_S}{r} + \frac{G}{r^2}(Q^2 + P^2) \tag{۱۴۳.۱}$$

در غیاب بار این متریک باید به جواب شوارتزشیلد تقلیل یابد که $R_S = 2GM$ است و M جرم سیاه‌چاله است.

در نهایت متریک رایسنر-نوردشتروم به صورت زیر می‌تواند نوشته شود

$$ds^2 = -\Delta t^2 + \Delta^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{۱۴۴.۱}$$

که

$$\Delta = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G}{r^2}(Q^2 + P^2) \tag{۱۴۵.۱}$$