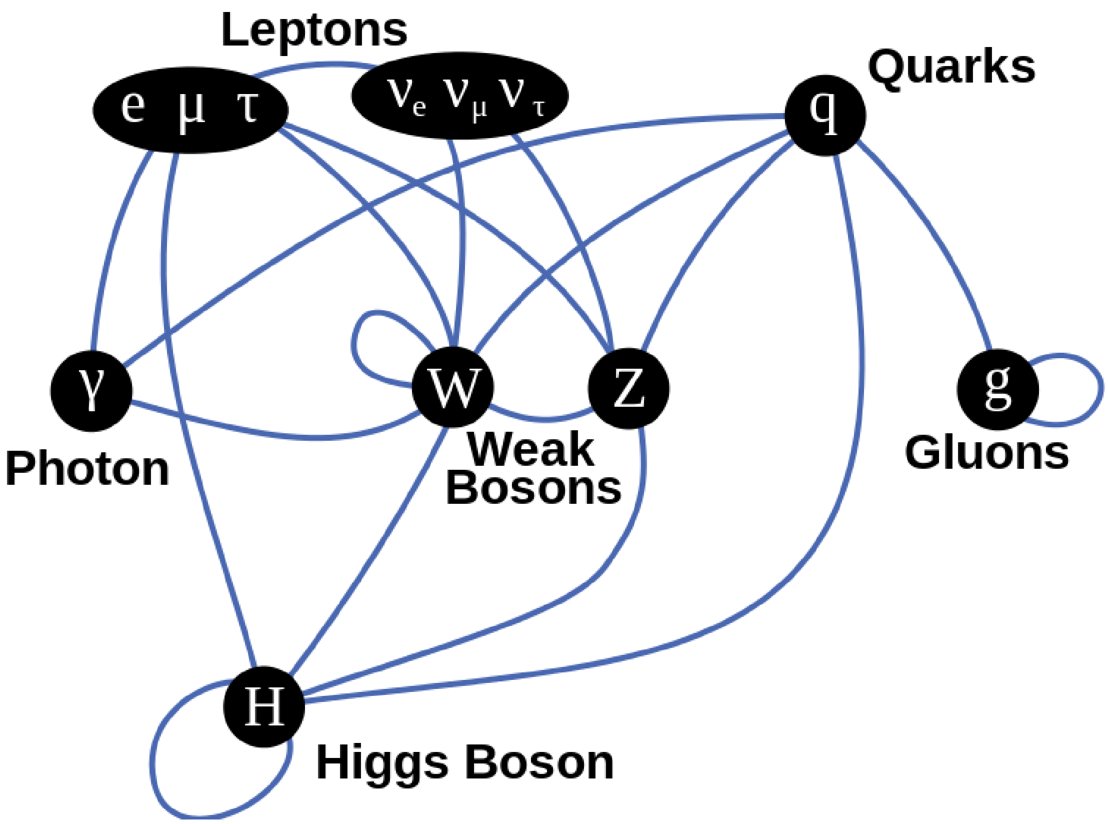
آشنایی مقدماتی با نظریه میدان کوانتومی (QFT)



تهیه کننده

دکتر حسین مصحفی

www.icosmo.ir

فهرست مطالب

فصل ۱

آشنایی با فیزیک ذرات و نظریه میدان‌های کوانتومی

مفهوم دوگانی موج-ذره نشان می‌دهد که ویژگی‌های الکترون‌ها و فوتون‌ها بطور بنیادی بسیار شبیه به هم هستند. بر خلاف تفاوت آشکار در جرم و بار، تحت شرایط درست هر دو الگوی موج‌گونه پراش را نشان می‌دهند و هر دو می‌توانند در شرایطی مانند ذرات رفتار کنند.

بروز چنین موجوداتی در فیزیک کلاسیک بسیار متفاوت است. الکترون‌ها و دیگر ذرات مادی به عنوان اجزای بنیادی تشکیل دهنده ماده شناخته می‌شوند. اما نور، یک مفهوم اشتقاقی است: نور به صورت امواج میدان الکترومغناطیسی معرفی می‌شود. اگر فوتون‌ها و دیگر ذرات مادی واقعا در یک پایه برابر قرار داده شوند، این اختلاف بین این ذرات در دنیای کوانتومی چطور سازگار می‌شود؟

میدان یک مفهوم اصلی است و ذرات مفاهیم مشتق شده از میدان هستند که به صورت کوانتش میدان ظاهر می‌شوند. فوتون‌ها از کوانتش میدان الکترومغناطیسی و ذرات جرم‌دار و باردار نظیر الکترون از کوانتش میدان‌های مادی حاصل می‌شوند. برای هر نوع از ذرات بنیادی، یک میدان مرتبط وجود دارد.

در فیزیک کلاسیک، دلیل اصلی برای معرفی مفهوم میدان، برای ساختن قوانین طبیعت است که موضعی هستند. قوانین قدیمی نظیر قانون کولن یا نیوتن، مستلزم «کنش از راه دور» هستند. این بدین معناست که نیروی تجربه شده توسط یک الکترون (یا سیاره) با حرکت یک پروتون (یا ستاره) از راه دور بلادرنگ تغییر می‌کند. این وضعیت از نظر فلسفی رضایت‌بخش نیست. مهمتر از آن، از لحاظ آزمایشگاهی نیز اشتباه است. نظریه‌های میدان ماکسول و اینشتین، وضع را کمی بهبود می‌بخشند، با این فرض که تمام برهمکنش‌ها به صورت موضعی توسط میدان منتقل می‌شوند.

الزام موضعیت یک انگیزش قوی برای مطالعه نظریه‌های میدان در دنیای کوانتومی است. اما، دلایل بیشتری برای این‌که میدان یک مفهوم بنیادی است وجود دارد. اما چرا نظریه میدان کوانتومی؟
یک دلیل این است که ترکیب مکانیک کوانتومی و نسبیت خاص نشان می‌دهد که عدد ذره پایسته نیست. ذرات می‌توانند خلق و فنا شوند. دیراک اولین بار پیش‌بینی کرد که نسبیت وجود پاد-ذرات را لازم می‌داند و بطور آزمایشگاهی نیز این خلق و فنای ذرات مشاهده شده‌اند. ذره‌ای به جرم m را درون جعبه‌ای به ابعاد L در نظر بگیرید. عدم قطعیت هایزنبرگ در تکانه هست $\Delta p \geq \hbar/L$. در دیدگاه نسبیتی، تکانه و انرژی پایه یکسانی دارند، بنابراین باید عدم قطعیت در انرژی از مرتبه $\Delta E \geq \hbar c/L$ داشته باشیم. اما، اگر عدم قطعیت از مقدار $\Delta E = 2mc^2$ فراتر رود، از سد انرژی خلق جفت ذره- پاد ذره در خلاء عبور می‌کنیم. جفت‌های ذره و پادذره زمانی مهم خواهند بود که ذره‌ای به جرم m در ابعادی به زیر مقید شود

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

در فواصل کوچک‌تر از این، احتمال زیادی وجود دارد که جفت‌های ذره-پادذره‌ای که حول ذره‌ی اصلی تجمع کرده‌اند را آشکار نماییم. فاصله λ طول موج کامپتون نامیده می‌شود. این طول همواره کوچک‌تر از طول موج دوبروی $\lambda_{\rm dB} = h/|\vec{p}|$ است. طول موج دوبروی، فاصله‌ای است که ماهیت موج‌گونه‌ی ذرات ظاهر می‌شود؛ طول موج کامپتون فاصله‌ای است که مفهوم ذره نقطه‌ای منفرد بطور کامل شکسته می‌شود.
حضور گروهی ذرات و جفت ذرات در فواصل کوتاه، بیانگر این است که نوشتن یک نسخه نسبیتی از معادله شرودینگر تک-ذره‌ای (یا هر معادله‌ای برای تعداد ذرات ثابت) شکست خواهد خورد. در مکانیک کوانتوم غیر نسبیتی هیچ ساز و کاری برای مواجهه با تغییر در عدد ذره وجود ندارد. به علاوه، هر تلاشی برای ساخت ساده یک نسخه نسبیتی از مکانیک کوانتوم تک-ذره‌ای با مشکلات جدی مواجه است. (احتمالات منفی، حالت‌های با انرژی منفی بی‌نهایت، شکست علیت و غیره). این مشکلات، نشانگر این است که وقتی به محدوده نسبیتی وارد می‌شویم نیاز به فرمالیزم جدید یا تعداد ذرات نامشخص داریم. این فرمالیزم جدید نظریه میدان کوانتومی (QFT) است.

۱.۱ نظریه میدان کلاسیک

در این بخش جنبه‌های مختلف میدان‌های کلاسیک را بحث می‌کنیم.

۱.۱.۱ دینامیک میدان‌ها

یک **میدان** کمیتی است که در هر نقطه از فضا و زمان تعریف می‌شود. در حالی که در مکانیک کلاسیک ذرات با تعداد محدودی از مختصات تعمیم یافته $q_a(t)$ مواجه هستیم، در نظریه میدان، ما به دینامیک میدان‌ها علاقمندیم

$$\phi_a(\vec{x},t) \tag{۱.۱}$$

در نظریه میدان با سیستمی با بی‌نهایت درجه آزادی مواجه هستیم.

لاگرانژی

دینامیک یک میدان توسط لاگرانژی که تابعی از $\phi(\vec{x},t)$ ، $\dot{\phi}(\vec{x},t)$ و $\nabla\phi(\vec{x},t)$ است توصیف می‌شود. لاگرانژی شکلی به صورت زیر دارد

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \tag{۲.۱}$$

که نام رسمی $\mathcal{L}$ چگالی لاگرانژی است، اگرچه اغلب به صورت ساده لاگرانژی خوانده می‌شود.

۲.۱.۱ میدان‌های اسپین-صفر

معادله شرودینگر در مکانیک کوانتومی توصیف‌گر تحول زمانی یک میدان اسپین-صفر یا یک میدان اسکالر است. خواهیم دید که چطور می‌توان این توصیف را نسبیتی کرد.
یک راه بدیهی برای این کار، مراجعه به شکل نسبیتی هامیلتونی است

$$H = \sqrt{\bar{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{۳.۱}$$

با قرار دادن معادله ۳.۱ در معادله شرودینگر بدست می‌آید

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \bar{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\phi \tag{۴.۱}$$

اما دو مساله در این‌جا وجود دارد:

۱. مشتقات فضایی و زمانی همچنان رفتاری متفاوت دارند، بنابراین این معادله به عنوان یک معادله

نسبیتی کفایت نمی‌کند و ،

۲. بسط تیلور ریشه مربع تعداد بی‌نهایت از مشتقات را می‌دهد که روی ϕ عمل می‌کنند، و این نظریه را نا موضعی می‌کند.

یک راه حل این است که عمل‌گر را در دو طرف مربع کنیم، که نتیجه می‌دهد

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = (-\hbar^2c^2\bar{\nabla}^2 + m^2c^4)\phi \tag{۵.۱}$$

$$\Rightarrow (-\partial^0\partial_0 + \bar{\nabla}^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\phi = 0 \tag{۶.۱}$$

و یا اگر از دستگاه واحدهای طبیعی استفاده کنیم، $c = \hbar = 1$ خواهیم داشت

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0 \tag{۷.۱}$$

معادله‌ی ۷.۱ به معادله‌ی **کلین-گوردن** مشهور است. این معادله چیزی بیش از شکل عمل‌گریِ رابطه استاندارد نسبیتی $E^2 = m^2c^4 + \bar{p}^2c^2$ نیست.

توجه داشته باشید که ما می‌خواهیم میدان را کوانتیزه کنیم نه مختصات را، و مطلقا هیچ چیز کوانتومی درباره معادله کلین گوردن وجود ندارد. در این جا، این معادله صرفا یک معادله موج نسبیتی برای میدان کلاسیکی، بدون اسپین و بدون برهمکنش است.
اما ، یک مشکل اساسی با معادله کلین گوردن داریم. وقتی هامیلتونی را مربعی می‌کنیم $H = \sqrt{m^2c^4 + \bar{p}^2c^2}$ تا به این برسیم $H^2 = m^2c^4 + \bar{p}^2c^2$ ، ویژه مقادیر انرژی خواهد شد $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \bar{p}^2c^2}$. به نظر می‌رسد ویژه مقادیر انرژی منفی داریم! به وضوح از نظر فیزیکی این بی معناست چرا که انرژی منفی بدین معناست که یک خلاء واقعی نداریم، و ذرات می‌توانند تا ابد تنزل کنند و مقدار تابش بی‌نهایت ساطع کنند.

۳.۱.۱ گروه تقارنی $SU(2)$ برای نمایش اسپین

سوال اینجاست که چرا برای اسپین از $SO(3)$ به جای $SU(2)$ استفاده نمی‌کنیم؟ جواب اصلی ریشه تاریخی دارد. آزمایشاتی که در روزهای اولیه تولد مکانیک کوانتومی انجام می‌شد، با ذراتی که درجه آزادی دورانی در فضا زمان دارند سازگار نبود. در عوض، داده‌ها نشان می‌دادند که در راستای هر محوری، اسپین می‌تواند یکی از دو مقدار ممکن را بگیرد، و $SO(3)$ این را توضیح نمی‌داد. اما در این‌جا یک توجیه ریاضیاتی تر را در نظر می‌گیریم.

ابتدا، بخاطر بیاوریم که اسپین یک پدیده‌ی کاملا مکانیک کوانتومی است، که مشابه کلاسیک ندارد. از آن‌جا که داده‌ها دو حالت ممکن اسپینی را تقاضا می‌کنند، میدان توصیف‌گر باید ۲ مؤلفه‌ي اسپینی داشته باشد، $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$. حال اگر به دنبال یک نمایش دو بعدی از $SO(3)$ باشیم، در میابیم که فقط یکی وجود دارد: $D_0 \oplus D_0$ ، نمایش بدیهی که متشکل از تمام ۱ ها است. این بدین معناست که

$$\begin{pmatrix} \Psi_1' \\ \Psi_2' \end{pmatrix} = D_0 \oplus D_0 \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \qquad (۸.۱)$$

این تنها نمایش ۲ بعدی ممکن برای $SO(3)$ است.

راه حل این مساله در یکی از خواص مکانیک کوانتومی یافت شد. تنها کمیت فیزیکی قابل اندازه‌گیری در نظریه کوانتومی، دامنه‌ی احتمال است، که متناسب با مجذور Ψ است. بنابراین حالت $\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$ از نظر فیزیکی با حالت $\begin{pmatrix} -\Psi_1 \\ -\Psi_2 \end{pmatrix}$ تفاوتی ندارد.

حال یک عنصر کلی از $SO(3)$ را در نظر بگیرید: $e^{i(\phi J_x + \psi J_y + \theta J_z)}$. از طرف دیگر، یک عنصر کلی از $SU(2)$ خواهد بود $e^{i(\phi \frac{\sigma_x}{2} + \psi \frac{\sigma_y}{2} + \theta \frac{\sigma_z}{2})}$.

حال فرض کنید سیستم را تحت زاویه‌ی 2π حول محور z می‌چرخانیم. عنصر $SO(3)$ متناظر با این چرخش $e^{i2\pi J_z}$ خواهد بود، در حالی که عنصر متناظر با این چرخش در $SU(2)$ برابر است با $e^{i\pi\sigma_z}$. ضریب تفاوت $1/2$ بدین معناست که فضای اسپینور تنها نصف زاویه چرخش $SO(3)$ می‌چرخد. بنابراین، در چرخش 2π ، $U \in SU(2) \to -U$، در حالی که در $R \in SO(3) \to R$ است. بنابراین، هر دوی U و $-U$ متناظر با R هستند. یک تناظر ۲ به ۱ بین $SU(2)$ و $SO(3)$ برقرار است.

همانطور که ذکر شد اسپین یک اثر کاملا کوانتومی است و از نظر آزمایشگاهی فقط ۲ مقدار مجاز است، اما $SO(3)$ چنین نمایشی ندارد، در حالی که نمایش $j = 1/2$ از $SU(2)$ این کار را انجام می‌دهد. بنابراین از $SU(2)$ استفاده می‌کنیم.

نکته مهمی که باید توجه کنیم این است که *اسپین* یک چرخش در میان فضا زمان نیست. بلکه یک چرخش در *فضای اسپینور* است، که یک درجه آزادی داخلی است. مانند بسیاری چیزها در مکانیک کوانتومی، فضای اسپینور نیز یک ساختار ریاضیاتی است.

۴.۱.۱ ذرات اسپین ۱/۲

پیدا کردن معادله ۷.۱ ساده بود چرا که میدان‌های اسکالر زیرنویس‌های فضا زمانی و اسپینوری ندارند، و بنابراین به طور بدیهی تحت $SU(2)$ و گروه لورنتز تبدیل می‌شوند.

اما یک ذره اسپین $1/2$ دو مؤلفه موهومی دارد، یکی برای اسپین $+1/2$ و دیگری برای اسپین $-1/2$. بنابراین چنین ذره‌ای را به صورت اسپینور دو مؤلفه‌ای نمایش می‌دهیم

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{۹.۱}$$

که ψ_1 و ψ_2 هر دو موهومی هستند. پس، به تعدادی عملگر دیفرانسیلی به شکل ماتریس‌های 2×2 نیاز داریم تا در چنین میدانی عمل کنند و معادله حرکت را شکل دهند.

با تبعیت از رویکرد دیراک، با چنین عملگرهای 2×2 ، معادله حرکت باید به نوعی معادله کلین گوردن را دلالت کند (که تنها نظریه را نسبیتی می‌کند نه کوانتومی). بنابراین هدف یافتن یک معادله با ماتریس عملگری 2×2 است که روی ψ چنان عمل کند که معادله ۷.۱ را نتیجه دهد.

رویکرد دیراک یافتن عملگری به شکل زیر است

$$\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 \tag{۱۰.۱}$$

که γها ماتریس‌های 2×2 هستند، و معادله حرکت می‌شود $\not{D}\psi = -im\psi$. چالش یافتن ماتریس‌های 2×2 برای γها است. دیراک استدلال کرد، که برای درست نسبیتی کردن، دو بار عمل کردن $\not{D}$ باید معادله کلین گوردن را بدهد. به عبارت دیگر

$$\not{D} = -im\psi \quad \Rightarrow \quad \not{D}\not{D}\psi = -im\not{D}\psi \tag{۱۱.۱}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu \psi = -im(-im\psi) \tag{۱۲.۱}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi = -m^2 \psi \tag{۱۳.۱}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2\right)\psi = 0 \tag{۱۴.۱}$$

این روابط به معادله کلین گوردن می‌رسد اگر $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}$ باشد. یا با استفاده از جمع تقارنی در رابطه (۱۴.۱) ، معادله کلین گوردن نتیجه می‌دهد اگر $\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = -\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}$ باشد. به صورت زیر می‌توان

نوشت

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I} \qquad (۱۵.۱)$$

اگر ماتریس‌های γ در رابطه (۱۵.۱) صدق کنند، رابطه (۱۴.۱) نتیجه خواهد داد

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = 0 \Rightarrow (-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = 0 \Rightarrow (\partial^2 - m^2)\psi = 0 \qquad (۱۶.۱)$$

که دقیقا معادله کلین گوردن است.

بنابراین، معادله دیراک را به صورت زیر داریم

$$(\not{\partial} + im)\psi = 0 \qquad (۱۷.۱)$$

اما هنوز یک مشکل وجود دارد. در واقع، مجموعه ماتریس‌های 2×2 که معادله (۱۵.۱) را حل کنند وجود ندارند. همچنین ماتریس‌های 3×3 این چنین نیز وجود ندارند. کوچکترین ابعاد ممکن برای این ماتریس‌ها 4×4 است. واضح است که اگر بخواهیم ذرات اسپین $1/2$ را با دقیقا ۲ حالت اسپینی توصیف نماییم، با استفاده از ۴ مؤلفه اسپین به نظر درست نمی‌رسد. اما، ما لزوم ماتریس‌های دیراک 4×4 را می‌پذیریم و ادامه می‌دهیم.

به جای استفاده از $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ ، اسپینورهای ۲ بعدی را تعریف می‌کنیم

$$\psi_L \equiv \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad \psi_R \equiv \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \qquad (۱۸.۱)$$

و اسپینور ۴ مؤلفه‌ای زیر را داریم

$$\psi \equiv \begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix} \qquad (۱۹.۱)$$

حال می‌توان رابطه ۱۵.۱ را حل کرد. جزئیات حل این مساله را بررسی نمی‌کنیم، تنها یک جواب را

می‌بینیم. ماتریس‌های ۴ × ۴ به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{۲۰.۱}$$

که σ^0 ماتریس واحد ۲ × ۲ است، و σ^i ماتریس‌های اسپین پائولی هستند. حال یک شکل صریح از ماتریس‌های گامای دیراک داریم، رابطه (۱۷.۱) به شکل صریح به این صورت است:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 + i\partial_2 \\ 0 & 0 & -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 \\ \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 & 0 & 0 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = -im \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{۲۱.۱}$$

یا بر حسب ψ_L و ψ_R می‌توان نوشت

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_R = +m\psi_L \tag{۲۲.۱}$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_L = +m\psi_R \tag{۲۳.۱}$$

که ۴-بردارهای $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1 \sigma^2, \sigma^3)$ و $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ تعریف کرده‌ایم.

۵.۱.۱ گروه تقارنی لورنتز

در این بخش درک عمیق‌تری خواهیم یافت از اینکه چرا قادر به یافتن یک نمایش ماتریسی ۲× ۲ fvhd برای حل (۱۵.۱) نبودیم. توجه داشته باشیم که ایده پشت معادله دیراک (۱۷.۱) این بود که بر معادله کلین گوردن دلالت کند، به عبارت دیگر نظریه را نسبیتی کنیم. به زبان دیگر، نظریه‌ای بسازیم که تحت گروه لورنتز $SO(1,3)$ ناوردا باشد.

گروه لورنتز شامل سه دوران و ۳ انتقال است. اگر مولدهای دوران را J^i $(i = 1,2,3)$ بنامیم، و مولدهای

انتقال را K^i $(i = 1, 2, 3)$، آن‌گاه روابط جابجایی به صورت زیر خواهد بود

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k \quad (۲۴.۱)$$
$$[J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k \quad (۲۵.۱)$$
$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k \quad (۲۶.۱)$$

برای این‌که ساختار واقعی این گروه واضح‌تر شود، دو ترکیب خطی جدید از مولدها را معرفی می‌کنیم:

$$N^i = \frac{1}{2}(J^i - iK^i) \qquad N^{i\dagger} = \frac{1}{2}(J^i + iK^i) \quad (۲۷.۱)$$

اگر روابط جابجایی برای N^i و $N^{i\dagger}$ بنویسیم، بدست می‌آید

$$[N^i, N^j] = i\epsilon^{ijk} N^k \quad (۲۸.۱)$$
$$[N^{i\dagger}, N^{j\dagger}] = i\epsilon^{ijk} N^{k\dagger} \quad (۲۹.۱)$$
$$[N^i, N^{j\dagger}] = 0 \quad (۳۰.۱)$$

بنابراین، هر دوی N^i و $N^{i\dagger}$ جداگانه یک گروه $SU(2)$ تشکیل می‌دهند. به زبان ریاضی‌تر، گروه $SO(1,3)$ به $SU(2) \otimes SU(2)$ همریخت است، که به صورت $SO(1,3) \cong SU(2) \otimes SU(2)$ نمایش می‌دهیم. اگرچه مفهوم هم‌ریختی یک ایده مفصل در ریاضیات است، اما می‌توان بطور ساده گفت که دو گروه هم‌ریخت، ساختار گروهی مشابهی دارند.

پس، چون نمایش $SU(2)$ با مقدار j تعریف شده است، می‌توان دید که یک نمایش خاص از گروه لورنتز $SO(1,3) \cong SU(2) \otimes SU(2)$ با دو مقدار j تعریف می‌شود، که به صورت دوگانی $(j, j') = (0, 0)$ نمایش می‌دهیم. کوچک‌ترین نمایش ممکن $(j, j') = (0, 0)$ است. این نمایش یک حالت از $j = 0$ و یک حالت از $j' = 0$ دارد، بنابراین تعداد ۱ × ۱ = ۱ حالت مجموع دارد. در نتیجه، این نمایش توصیف‌گر یک میدان اسکالر است.

پس، یک حالت $(0, 1/2)$ نیز می‌تواند وجود داشته باشد، که یک حالت از $j = 0$ ، ولی دو حالت از $j = 1/2$ دارد، که به صورت مجموع $1 \times 2 = 2$ حالت می‌شود. بنابراین، این نمایش توصیف‌گر یک تک میدان اسپین ۱/۲ است. این میدان را ψ_L می‌نامیم ، و نمایش $(0, 1/2)$ را **نمایش اسپینور چپ‌گرد** از گروه لورنتز می‌خوانیم.

واضح است که نمایش $(1/2, 0)$ نیز داریم که دو حالت مجموع دارد، و متناظر با میدان ψ_R است. این

نمایش اسپنور راستگرد از گروه لورنتز نامیده می‌شود. این دلیل آن است که در رابطه (۱۸.۱) استفاده شد. نمایش چپگرد $(0,1/2)$ روی ψ_L عمل می‌کند و نمایش راستگرد $(1/2,0)$ روی ψ_R عمل می‌کند.

نمایش $(1/2,1/2)$ ، دو حالت از $j=1/2$ و دو حالت از $j'=1/2$ دارد، پس $2\times 2=4$ مجموعا دارد. این نمایش یک نمایش بردار فضا زمان است که روی بردارهای فضا زمان عمل می‌کند.

حال، نمایش $SU(2)$ که با j مشخص می‌شود یک نمایش غیر قابل تقلیل است، و بنابراین ضرب تانسوری $SU(2)\otimes SU(2)$ که با دوگان (j,j') مشخص می‌شود. این بدین معناست که هیچ زیرفضای غیر قابل تقلیلی وجود ندارد، و همچنین نمایش (j,j') نیز ندارد، یک تبدل خاص وجود دارد که حالت (j,j') را به (j',j) می‌برد. برای $(0,0)$ و $(1/2,1/2)$ این چیزی را تغییر نمی‌دهد. اما بدین معناست که نمایش‌های $(0,1/2)$ و $(1/2,0)$ همواره باید با هم بیایند.

معنای فیزیکی این واقعیت این اس که نسبیت تقاضا می‌کند که اگر شما یک نظریه با ذرات اسپین ۱/۲ بخواهید درست کنید، با خودشان به تنهایی نمی‌توانند وجود داشته باشند. باید به صورت جفت بیایند، هر کدام تحت یک نمایش $SU(2)$ با دستگردی متضاد تبدیل می‌شوند.

۶.۱.۱ تفسیر دریای ذرات دیراک از پاد ذرات

در ابتدا ممکن است به نظر برسد غیر ممکن بودن یافتن جواب ماتریسی ۲ × ۲ برای معادله (۱۵.۱) بدین معنا باشد که میدان‌هایی با حالت‌های ۲ اسپینوری نداریم. اما، دیدیم که ما به به اسکالرها و اسپینورهای ۴- مؤلفه‌ای فضا زمان محدود نیستیم. می‌توانیم دو میدان داشته باشیم، ψ_L و ψ_R ، که با هم جفت می‌شوند تا میدان‌های اسپین ۱/۲ را در اسپینور ۴- مؤلفه‌ای شکل دهند $\psi=\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}$. بنابراین دیراک با چالش تفسیر هر دوی این‌ها مواجه بود، در حالی‌که هم زمان با حالت‌های انرژی منفی که پیش‌تر اشاره شد نیز درگیر بود.

راه حل دیراک، اگرچه امروزه کنار گذاشته شده، اما ارزش یادآوری را دارد. دیراک پیشنهاد کرد که از آنجا که ذرات اسپین ۱/۲ از اصل طرد پائولی تبعیت می‌کنند، تعداد بی‌شماری از این ذرات می‌توانند هم اکنون در سطوح انرژی منفی باشند، و بنابراین همین الان این حالت‌ها را اشغال کرده‌اند، و از سقوط ذرات بیشتر و آزاد شدن انرژی منفی جلوگیری می‌کنند. بنابراین، مساله انرژی منفی حل شد.

به علاوه، دیراک ذکر کرد که برای یکی از ذرات ممکن است در این دریای بی‌نهایت انرژی منفی ، ناگهان برانگیخته شده و به حالت انرژی مثبت بیاید، و یک حفره باقی بگذارد. از نظر آزمایش، این حالت برای ما یک ذره با همان جرم و بار مخالف ظاهر خواهد شد. وی چنین ذراتی را **پاد ذره** نامید. برای مثال، پاد ذره‌ی الکترون، پاد الکترون یا پوزیترون است. پوزیترون ذره‌ای به همان مفهوم الکترون نیست، بلکه یک حفره در دریای بی‌نهایت الکترون‌ها است. و هر کجا این بار منفی از دست رود، یک حفره در ذرات با بار مثبت باقی

می‌گذارد.

بنابراین، ψ_L یک ذره را توصیف می‌کند، و به دلیل دریای بی‌نهایت ذرات منفی، همواره یک حفره می‌تواند وجود داشته باشد که با ψ_L توصیف می‌شود. همه چیز درباره این ایده دیراک به صورت ریاضیاتی انجام شد، و ۵ سال پس از پیش‌بینی نظری دیراک، در آزمایشگاه نیز وجود پاد ذرات تأیید شد.

اما، ایده دیراک دو مشکل اساسی دارد:

۱. فرض بر این بود که این نظریه، برای تک ذرات است، اما حالا مستلزم تعداد بی‌نهایت ذره است

۲. ذراتی نظیر فوتون، پایون، مزون‌ها، یا اسکالرهای کلین-گوردن هیچ‌کدام از اصل طرد پائولی تبعیت نمی‌کنند، اما همچنان حالت‌های انرژی منفی دارند، و بنابراین بحث دیراک در مورد آن‌ها صادق نیست

اما عنوان پاد ذرات همچنان وجود دارد، و به بخش راستگرد میدان اسپین ۱/۲ همچنان پاد ذرات می‌گوییم و بخش چپگرد نیز ذرات.

۷.۱.۱ تفسیر QFT از پاد ذرات

ما دو معادله تا اینجا داشته‌ایم: معادله کلین گوردن(۷.۱) برای ذرات اسکالر یا اسپین صفر، و معادله دیراک (۱۷.۱) برای ذرات اسپین-۱/۲ .

اما QFT پیشنهاد می‌کند تفسیر متفاوتی با استفاده از میدان‌ها دارد. در واقع، م یدان‌ها حالت نیستند، آن‌ها عمل‌گر هستند. و در نتیجه نمی‌توانند انرژی داشته باشند. یک حالت با عمل کردن روی خلاء با عمل‌گرهای ϕ یا ψ ایجاد می‌شود، و بعد از آن حالت $\phi|0\rangle$ یا $\psi|0\rangle$ انرژی دارد.

بنابراین، QFT این اجازه را می‌دهد که پاد ذرات را به صورت ذرات واقعی ببینیم. از نظر مفوهمی نیاز به ایده دشوار دریای بی‌نهایت از ذرات انرژی منفی نداریم. خلاء $|0\rangle$ ، با هیچ ذره درون آن، حالت با پایین‌ترین انرژی ممکن است. و هیچ انرژی منفی برای این ذرات وجود ندارد.

نظریه QFT مساله انرژی منفی را با باز تفسیر آنچه که یک حالت تعریف می‌شود و باز تعریف یک عمل‌گر حل می‌کند. میدان‌های ϕ و ψ عمل‌گر هستند، نه حالت، و بنابراین انرژی مرتبط با آن‌ها وجود ندارد.

۸.۱.۱ لاگرانژی‌های اسکالرها و ذرات دیراک

حال معادلات حرکت (۷.۱) و (۱۷.۱) را داریم، و می‌خواهیم کنش منجر به این معادلات حرکت را بیابیم. این کنش‌ها عبارتند از L begineqnarray $_{KG} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi$

$$\mathcal{L}_D = i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L) \quad (۳۰.۱)$$

که علامت خنجر † نماینده‌ی همیوغ هرمیتی است، $\psi_L^\dagger = (\psi_1^\star, \psi_2^\star)$، $\psi_R^\dagger = (\psi_3^\star, \psi_4^\star)$. می‌توان از $\mathcal{L}_D$ نسبت به هر دوی $\psi_L^\dagger$ و $\psi_R^\dagger$ وردش گرفت تا معادلات حرکت برای ψ_L و ψ_R بدست آیند یا بالعکس. دو مجموعه معادلات به سادگی همیوغ یکدیگرند، و بنابراین نمایان‌گر یک مجموعه از معادلات هستند.

برای این‌که رابطه‌ی (۸.۱.۱) را ساده‌تر کنیم، قرارداد می‌کنیم که از ماتریس‌های گامای دیراک (۲۰.۱) استفاده کنیم تا تعریف کنیم $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$. با استفاده از این، تمام ۴ جمله در رابطه‌ی (۸.۱.۱) به این صورت خلاصه می‌شود

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{۳۱.۱}$$

۹.۱.۱ جریان‌های پایستار

حال چند مثال از کاربرد لاگرانژی‌هایی که تعریف کردیم را با هم می‌بینیم.

یک ذره اسکالر کلین-گوردن بدون جرم فرض کنید، که با $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$ توصیف می‌شود. فرض کنید $\phi \to \phi + \epsilon$، که ϵ یک ثابت است. از آن‌جا که $\partial^\mu \phi \to \partial^\mu \phi + \partial^\mu \epsilon = \partial^\mu \phi$، لاگرانژی ناوردا است. بنابراین (با استفاده از $\delta\phi = 1$)، کمیت پایستار می‌شود

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi = -\partial^\mu \phi \tag{۳۲.۱}$$

و یا لاگرانژی کلین گوردن با میدان‌های اسکالر مختلط ϕ و $\phi^\dagger$ را در نظر بگیرید، که به صورت $\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^\dagger \phi_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$ می‌نویسیم. می‌توانیم تبدیل $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ و $\phi^\dagger \to \phi^\dagger e^{-i\alpha}$ را انجام دهیم. این نوع از تبدیلات ، تبدیل $U(1)$ نامیده می‌شوند، چرا که $e^{i\alpha}$ یک عنصر از گروه ماتریس‌های یکانی ۱ × ۱ است.

کمیت پایستار مرتبط با تقارن $U(1)$ عبارت است از

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger = i(\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) \tag{۳۳.۱}$$

یا در مورد لاگرانژی دیراک، توجه داشته باشید که این تحت تبدیل $\psi \to e^{i\alpha}$ در $U(1)$ ناوردا است، که جریان پایستار آن هست

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \tag{۳۴.۱}$$

در هر دو مثال، تقارن $U(1)$ میدان را در همه نقاط فضا یک مرتبه تغییر می‌دهد به یک شکل. به عبارت

دیگر، بطور سراسری یک فاز ثابت منفرد $e^{i\alpha}$ است. بنابراین، چنین تقارنی را یک **تقارن سراسری** می‌نامیم.

۱۰.۱.۱ معادله دیراک با یک میدان الکترومغناطیسی

در این بخش هدف ما یافتن یک لاگرانژی است که میدان الکترومغناطیسی و ذرات اسپین ۱/۲ که به میدان الکترومغناطیسی جفت شده‌اند را بیابیم، و به علاوه برهمکنش بین آن‌ها را نیز بیابیم. ابتدا لاگرانژی بدون برهمکنش را می‌نویسیم.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{EM} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_{\mu\nu} \qquad (۳۵.۱)$$

اما، چون بخش دیراک لاگرانژی هیچ جمله مشترکی با بخش الکترومغناطیس ندارد، معادلات حرکت و کمیت‌های پایستار برای هر دوی ψ و A^μ دقیقا مشابه خواهند بود، اگر دیگری اصلا نمی‌بود. به عبارت دیگر، هر دو میدان‌ها به راه خود می‌رفتند اگر میدان دیگر وجود نداشت (برهمکنش وجود نداشت). باید راهی برای جفت کردن میدان‌ها و تولید برهمکنش بیابیم.

برهمکنش را به یک نظریه با اضافه کردن جملاتی به نام جمله برهمکنش به لاگرانژی اضافه می‌کنیم. بنابراین، لاگرانژی نهایی به شکل $\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{int}$ خواهد بود.

حال این کار را با جفت کردن میدان الکترومغناطیسی A^μ به جریان ناشی از تقارن $U(1)$ در $\mathcal{L}_D$ انجام می‌دهیم، و معادله‌ی (۳۴.۱) را می‌نویسیم. به بیان دیگر، جمله برهمکنشی متناسب با $A^\mu j_\mu$ خواهد بود.

بنابراین، اضافه کردن یک ثابت متناسب با q ، لاگرانژی به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu - qj^\mu A_\mu && (۳۶.۱)\\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (J^\mu + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu && (۳۷.۱)\end{aligned}$$

دقت داشته باشید که $\mathcal{L}$ همچنان تحت تقارن سراسری $U(1)$ ناوردا است، و جریان $U(1)$ همچنان $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ است.

همچنین توجه نمایید که لاگرانژی‌ها در (۳۵.۱) و (۳۷.۱) یکسان هستند به جز یک جابجایی در جمله جریان $J^\mu \to J^\mu + qj^\mu$. از نظر فیزیکی، $J^\mu = (\rho, \bar{J})$ نمایانگر جریان است و جریان میدان تولید می‌کند. این واقعیت که J^μ در رابطه (۳۷.۱) جابجا شده بدین معناست که ذرات اسپین ۱/۲ در این نظریه در میدان مشارکت دارند.

اگر قرار دهیم $q = e$، لاگرانژی تبدیل به لاگرانژی الکترودینامیک کوانتومی (QED) خواهد بود که دقیق‌ترین پیش‌بینی‌های تجربی را تا کنون داشته است.

۱۱.۱.۱ تقارن پیمانه‌ای

در این‌جا بحث مهمی را می‌خواهیم مطرح کنیم. یک بار دیگر لاگرانژی دیراک (۱۷.۱) را در نظر بیاورید. همانطور که ذکر شد، این لاگرانژی تحت تبدیل سراسری $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ از $U(1)$ ناوردا است. منظور از سراسری بودن این است که روی میدان دقیقا در همه نقاط فضا زمان به یک شکل عمل می‌کند. قصد داریم این تقارن را موضعی کنیم، چنان که α وابسته به فضا زمان باشد ($\alpha = \alpha(x^\mu)$)، و سپس تلاش کنیم تا لاگرانژی را مجبور کنیم همچنان تحت تبدیل موضعی $U(1)$ ناوردا بماند. تبدیل تقارن سراسری به موضعی به **پیمانه‌ای** کردن تقارن مشهور است.

با موضعی کردن تبدیل $U(1)$ آغاز می‌کنیم:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \to \bar{\psi}e^{-\alpha(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha(x)}\psi \tag{۳۸.۱}$$

و چون عمل‌گرهای دیفرانسیلی روی $\alpha(x)$ مانند ψ عمل می‌کنند، جمله اضافی بدست می‌آوریم:

$$\mathcal{L} \to \bar{\psi}e^{-\alpha(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha(x)}\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x) \tag{۳۹.۱}$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x))\psi \tag{۴۰.۱}$$

اگر تقاضا کنیم که $\mathcal{L}$ تحت این تبدیل موضعی $U(1)$ ناوردا بماند، باید راهی برای حذف جمله $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x)$ پیدا کنیم. این کار به طریق زیر انجام می‌دهیم.

یک میدان دلخواه A_μ تعریف می‌کنیم که تحت $U(1)$ تبدیل $e^{i\alpha(x)}$ به صورت زیر تبدیل شود

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \tag{۴۱.۱}$$

کمیت A_μ را میدان پیمانه‌ای می‌نامیم، و q یک ثابت است.

A_μ را با جایگزینی مشتق استاندارد ∂_μ با **مشتق هموردا** معرفی می‌کنیم

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu \tag{۴۲.۱}$$

وقتی می‌گوییم یک ذره حامل بار است، از نظر ریاضیاتی بدین معناست که جمله متناظر در مشتق هموردایش دارد. بنابراین، اگر یک مشتق هموردای یک ذره برابر با عملگر مشتق عادی آن ∂^μ باشد، ذره هیچ باری ندارد و با چیزی برهمکنش نخواهد کرد. اگر حامل بار باشد، یک جمله متناظر با بار در مشتق هموردا خواهد داشت.

بنابراین، لاگرانژی مورد نظر ما هست

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu[\partial_\mu + iqA_\mu] - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - q\gamma^\mu A_\mu)\psi \quad (۴۳.۱)$$

و تحت تقارن موضعی $U(1)$ خواهیم داشت

$$\mathcal{L} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - q\gamma^\mu[A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x)])e^{i\alpha(x)}\psi \quad (۴۴.۱)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x) - q\gamma^\mu A_\mu + \gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x))\psi \quad (۴۵.۱)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - q\gamma^\mu A_\mu)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (۴۶.۱)$$

$$= \mathcal{L} \quad (۴۷.۱)$$

بنابراین افزودن میدان A_μ تقارن $U(1)$ را بازگرداند. دقت داشته باشید که اکنون نه تنها تحت تقارن موضعی $U(1)$ ناوردا است، بلکه تحت تقارن سراسری $U(1)$ نیز که با آن شروع کردیم ناوردا است و همان جریان پایسته $U(1)$ را دارد $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. این به ما امکان می‌دهد که لاگرانژی را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - qj^\mu A_\mu \quad (۴۸.۱)$$

اما یک مساله‌ای وجود دارد. اگر بخواهیم بدانیم که دینامیک A_μ چگونه است، طبیعتا باید از لاگرانژی نسبت به A_μ وردش بگیریم. اما چون هیچ مشتقی از A_μ وجود ندارد، معادله‌ی اویلر-لاگرانژ صرفا خواهد شد $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 0$. اما $-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -qj^\mu$ است. بنابراین معادله‌ی حرکت برای A_μ بیان می‌دارد که جریان حذف می‌شود، $j^\mu = 0$، و بنابراین لاگرانژی به شکل (۳۱.۱) باز می‌گردد که تحت تقارن موضعی $U(1)$ ناوردا نبود.

می‌توان این مساله را به شکل دیگر نیز گفت. همه میدان‌های فیزیکی باید نوعی از دینامیک را در خود داشته باشند. اگر نداشته باشند، آن‌ها صرفا یک میدان پس زمینه ثابت هستند که هرگز تغییر نمی‌کنند و هیچ کاری نمی‌کنند. همان‌طور که در معادله (۴۸.۱) نوشته شد، میدان A_μ داریم اما A_μ هیچ جمله جنبشی ندارد و بنابراین دینامیک ندارد.

برای درست کردن این مساله باید برخی انواع دینامیک یا جملات جنبشی را برای A_μ وارد کنیم. راهی که برای این مساله وجود دارد وارد کردن مقادیر قابل توجهی هندسه است.

برای یک میدان دلخواه A_μ جمله جنبشی پیمانه ناوردای مناسب هست

$$\mathcal{L}_{Kin,A} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{۴۹.۱}$$

که

$$F^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{q}[D^\mu, D^\nu] \tag{۵۰.۱}$$

و q ثابت تناشب معرفی شده در تبدیل A_μ در معادله‌ی (۴۱.۱) است. D^μ مشتق هموردای تعریف شده در رابطه (۴۲.۱) است. با باز نوشتن رابطه‌ی (۵۰.۱) و استفاده از تابع آزمون $f(x)$ داریم

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu}f(x) &= \frac{i}{q}[D^\mu, D^\nu]f(x) && (۵۱.۱)\\
&= \frac{i}{q}\big[(\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial^\nu + iqA^\nu) - (\partial^\nu + iqA^\nu)(\partial^\mu + iqA^\mu\big]f(x) && (۵۲.۱)\\
&= \frac{i}{q}\big[\partial^\mu\partial^\nu f(x) + iq\partial^\mu(A^\nu f(x)) + iqA^\mu\partial^\nu f(x) - q^2A^\mu A^\nu f(x) && (۵۳.۱)\\
&\quad -\partial^\nu\partial^\mu f(x) + iq\partial^\nu(A^\mu f(x)) + iqA^\nu\partial^\mu f(x) - q^2A^\nu A^\mu f(x)\big] && (۵۴.۱)\\
&= \frac{i}{q}\big[iqf(x)\partial^\mu A^\nu + iqA^\nu\partial^\mu f(x) + iqA^\mu\partial^\nu f(x) - q^2A^\mu A^\nu f(x) && (۵۵.۱)\\
&\quad -iqf(x)\partial^\nu A^\mu - iqA^\mu\partial^\nu f(x) - iqA^\nu\partial^\mu f(x) + q^2A^\nu A^\mu f(x)\big] && (۵۶.۱)\\
&= \big[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + iq[A^\mu, A^\nu]\big]f(x) && (۵۷.۱)
\end{aligned}$$

اما برای هر مقدار μ ، کمیت A^μ یک تابع اسکالر است، بنابراین جابجاگر صفر می‌شود، و این باقی می‌ماند

$$F^{\mu\nu} = \frac{i}{q}[D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{۵۸.۱}$$

بنابراین، با بازنویسی کل لاگرانژی خواهیم داشت

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{۵۹.۱}$$

و سرانجام، چون A^μ، به وضوح یک میدان فیزیکی است، بطور طبیعی می‌توان فرض کرد که یک جمله‌ی

چشمه موجب آن است، که آن را J^μ می‌نامیم. این کار شکل نهایی لاگرانژی را به این صورت خواهد کرد

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \qquad (۶۰.۱)$$

با مقایسه با رابطه‌ی (۳۷.۱) مشاهده میذکنیم که دقیقا یک شکل هستند. کاری که تا اینجا کرده‌ایم این بود: با یک لاگرانژی ذره اسپین ۱/۲ آغاز کردیم، که تقارن سراسری $U(1)$ داشت. سپس، تبدیل تقارن $U(1)$ به یک تقارن موضعی انجام دادیم (تقارن را پیمانه‌ای کردیم)، و بعد از آن آنچه می‌خواستیم اعمال کردیم تا یک نظریه سازگار بدست آوریم. میدان پیمانه‌ای A_μ توسط ما اجبار شد، و شکل جملات جنبشی A_μ بطور خودکار با ملاحظات هندسی تقاضا شد.

نظریه‌هایی نظیر این، که نیروهایی با مشخص کردن یک گروه لی تولید می‌شوند، نظریه‌های پیمانه‌ای یا **نظریه‌های یانگ-میلز** نامیده می‌شوند.

۲.۱ کوانتش

۱.۲.۱ مروری بر مفهوم کوانتش

در مکانیک کوانتومی (نه نظریه میدان کوانتومی)، کوانتش با فرض کمیت‌های دینامیکی خاصی و با استفاده از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ انجام می‌شد. بطور طبیعی، مکان $\bar{x}$ و تکانه $\bar{p}$ را در نظر می‌گیریم، و طبق عدم قطعیت هایزنبرگ، اندازه‌گیری مکان ذره بر روی تکانه اثر خواهد گذاشت و بالعکس.

برای دقیق‌تر بیان کردن، x و p را از صرفا یک متغیر بودن به عمل‌گرهای هرمیتی $\hat{x}$ و $\hat{p}$ (که نمایش ماتریسی نیز دارند) ارتقاء می‌دهیم که روی بردارهای فضا عمل می‌کنند. اگر در این فضا هر بردار $|\psi\rangle$ باشد، کمیت‌های فیزیکی قابل اندازه‌گیری، ویژه مقادیر عمل‌گرهای $\hat{x}$ و $\hat{p}$ می‌باشند

$$\hat{x}|\psi\rangle = x|\psi\rangle \qquad (۶۱.۱)$$

$$\hat{p}|\psi\rangle = p|\psi\rangle \qquad (۶۲.۱)$$

عدم قطعیت هایزنبرگ می‌گوید که اندازه‌گیری x روی مقدار p اثر می‌گذارد و بالعکس. این عمل اندازه‌گیری است که این اثر را ایجاد می‌کند. این یک مسأله مهندسی نیست و هیچ روش اندازه‌گیری بهتری برای خنثی کردن این اثر وجود ندارد. این یک واقعیت در مکانیک کوانتومی است که اندازه‌گیری یک متغیر روی دیگری اثر می‌گذارد.

پس، اگر x را و سپس p را اندازه بگیریم، مقادیر مختلفی برای هر دو بدست می‌آوریم اگر ابتدا p را اندازه

می‌گرفتیم و سپس x را. یعنی از نظر ریاضی، $\hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x}$. یا به عبارت دیگر

$$[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} \neq 0 \qquad (۶۳.۱)$$

از مکانیک کوانتومی می‌دانیم رابطه اصلی این است

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \qquad (۶۴.۱)$$

رابطه‌ی (۶۴.۱) را **رابطه‌ی جابجایی کانونی** می‌نامند، و این ساختار است که اجازه می‌دهد ساختار فیزیکی نظریه را مشخص کنیم.

بطور کلی، مجموعه‌ای از عمل‌گرها را انتخاب می‌کنیم که همگی با هم جابجا می‌شوند، و سپس یک حالت فیزیکی را توسط ویژه بردارهایش اسم گذاری می‌کنیم. برای مثال $\hat{x}$، $\hat{y}$ و $\hat{z}$ همگی با یکدیگر جابجا می‌شوند، بنابراین می‌توان یک حالت فیزیکی را با ویژه بردارها نام‌گذاری کرد $|\psi_r\rangle = |x, y, z\rangle$. یا چون $\hat{p}_x$، $\hat{p}_y$ و $\hat{p}_z$ همگی جابجا می‌شوند، می‌توان حالت را نوشت $|\psi_p\rangle = |p_x, p_y, p_z\rangle$.

همانطور که پیش تر ذکر شد، وقتی به QFT گام می‌نهیم، میدان‌ها دیگر حالت نیستند بلکه عملگر هستند. بنابارین روابط جابجایی باید بین میدان‌ها برقرار کنیم.

به علاوه، قبلا دیدیم که حالت‌ها ویژه بردارهای عمل‌گرهای مختصه هستند، حال، میدان‌ها را بر حسب ویژه بردارهای هامیلتونی بسط می‌دهیم.

۲.۲.۱ کوانتش کانونی میدان‌های اسکالر

از لاگرانژی کلین–گوردن در رابطه‌ی (۸.۱.۱) آغاز می‌کنیم، اما با کمی تغییر یک ثابت دلخواه Ω را اضافه می‌کنیم

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \Omega \qquad (۶۵.۱)$$

اضافه کردن ثابت Ω فیزیک مساله را تغییر نمی‌دهد.

برای کوانتش میدان، تکانه میدان و هامیلتونی آن را تعریف می‌کنیم

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(x)} = \dot{\phi} \qquad (۶۶.۱)$$

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \Omega \qquad (۶۷.۱)$$

حال، با استفاده از روابط جابجایی کانونی (۶۴.۱)، قرار می‌دهیم

$$[\phi(t,\bar{x}),\phi(t',\bar{x}')] \ = 0 \qquad (۶۸.۱)$$

$$[\Pi(t,\bar{x}),\Pi(t',\bar{x}')] = 0 \qquad (۶۹.۱)$$

$$[\phi(t,\bar{x}),\Pi(t',\bar{x}')] = i\delta(t-t')\delta(\bar{x}-\bar{x}') \qquad (۷۰.۱)$$

(در این‌جا ثابت پلانک $\hbar = 1$ است).

معنای این روابط را واضح‌تر خواهیم فهمید اگر جواب‌های معادله‌ی کلین-گوردن را بسط دهیم. یکی از جواب‌ها امواج تخت است $e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}\pm i\omega t}$، که

$$\omega = +\sqrt{\bar{k}^2+m^2} \qquad (۷۱.۱)$$

و $\bar{k}$ بردار موج معمول است.

بنابراین، میدان را می‌توان نوشت

$$\phi(t,\bar{x}) = \int \frac{d^3\bar{k}}{f(\bar{k})}\left[a(\bar{k})e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}-i\omega t}+b(\bar{k})e^{i\bar{k}\cdot x+i\omega t}\right] \qquad (۷۲.۱)$$

که $f(x)$ یک تابع اضافه است که برای اهداف بعدی وارد کرده‌ایم. حال، هر دوی $a(\bar{k})$ و $b(\bar{k})$ ثوابت دلخواهی هستند (ثوابت انتگرال‌گیری) که در بسط $\phi(t,\bar{x})$ بر حسب جواب‌های منفرد استفاده کرده‌ایم.

حال تقاضای ما این است که $\phi(t,\bar{x})$ هرمیتی باشد. این کار مستلزم این است که

$$\phi^\dagger = \phi \Rightarrow \phi^\star = \phi \Rightarrow b^\star(\bar{k}) = a(-\bar{k}) \qquad (۷۳.۱)$$

بنابراین، تغییر علامت متغیر انتگرال‌گیری $\bar{k}$ در جمله‌ی دوم در انتگرال امکان استفاده از نوشتار ۴-بردار را می‌دهد

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{f(\bar{k})}\left[a(\bar{k})e^{ik\cdot x}+a^\star(\bar{k})e^{-ik\cdot x}\right] \qquad (۷۴.۱)$$

که $k\cdot x = k^\mu x_\mu$ است.

حال، دقت نمایید که معیار انتگرال‌گیری یعنی $d^3\bar{k}$، تحت تبدیلات لورنتز ناوردا نیست (چون روی تمام بخش‌های فضا جمع می‌زند نه فقط روی بخش زمانی). بنابراین $f(\bar{k})$ را انتخاب می‌کنیم تا ناوردایی لورنتز را

حفظ کند.

می‌دانیم که d^3k همانند توابع δ و تابع پله Θ ناوردا خواهد بود. بنابراین، ترکیب ناوردایی زیر را در نظر گیرید

$$d^4k\delta(k^2+m^2)\Theta(k^0) \tag{۷۵.۱}$$

تابع δ صرفا نیاز است تا نسبیت برقرار بماند (جمله k^2+m^2 به صورت ساده نسبیتی است)، و تابع Θ علیت را برقرار نگه می‌دارد. بنابراین، معیار انتگرال‌گیری یک ناوردای لورنتز قابل قبول فیزیکی است. اتحاد تابع دلتا به صورت کلی زیر برقرار است،

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{\left|\frac{dg(x)}{dx}|_{x=x_i}\right|} \tag{۷۶.۱}$$

که x_i ها صفرهای تابع $g(x)$ هستند. می‌توانیم انتگرال k^0 روی معیار (۷۵.۱) را انجام دهیم، و با استفاده از این واقعیت که صفرهای $k^2+m^2=\bar{k}^2-k^0k_0+m^2$ بر حسب k^0 هستند $k^0k_0=\bar{k}^2+m^2=\omega^2$، بدست می‌آوریم

$$\int d^3\bar{k}dk^0\delta(k^2+m^2)\Theta(k^0) = \int \frac{d^3\bar{k}}{2\omega} \tag{۷۷.۱}$$

با اضافه کردن ضریب $(2\pi)^3$ ، کمیت ناوردا را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \tag{۷۸.۱}$$

در نهایت بدست می‌آید

$$\phi(x) = \int \widetilde{dk}\big[a(\bar{k})e^{ik\cdot x} + a^\star(\bar{k})e^{-ik\cdot x}\big] \tag{۷۹.۱}$$

که تعریف کرده‌ایم $\widetilde{dk} \equiv \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega}$.

روابط جابجایی که در (۷۰.۱) تعریف کردیم، حالا اعمال می‌کنیم

$$[a(\bar{k}), a(\bar{k}')] = 0$$ (۸۰.۱)

$$[a^\dagger(\bar{k}), a^\dagger(\bar{k}')] = 0$$ (۸۱.۱)

$$[a(\bar{k}), a^\dagger(\bar{k}')] = (2\pi)^3 2\omega\delta^3(\bar{k} - \bar{k}')$$ (۸۲.۱)

عمل‌گرهای $a(\bar{k})$ و $a^\dagger(\bar{k})$ اسکالر هستند، بنابراین در این حالت $a^\star = a^\dagger$.

به علاوه، می‌توان هامیلیتونی H را بر حسب (۷۹.۱) به این شکل نوشت:

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3x\left(\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \Omega\right)$$ (۸۳.۱)

$$= \frac{1}{2}\int \widetilde{dk}\widetilde{dk'}d^3x[(-i\omega a(\bar{k})e^{ik\cdot x} + i\omega a^\star(\bar{k})e^{-ik\cdot x})(-i\omega' a(\bar{k}')e^{i\bar{k}'\cdot x} + i\omega' a^\star(\bar{k}')e^{-ik'\cdot x})$$ (۸۴.۱)

$$+(i\bar{k}a(\bar{k})e^{ik\cdot x} - i\bar{k}a^\star(\bar{k})e^{-ik\cdot x})\cdot(i\bar{k}'a(\bar{k}')e^{ik'\cdot x} - i\bar{k}'a^\star(\bar{k}')e^{-ik'\cdot x})$$ (۸۵.۱)

$$m^2(a(\bar{k})e^{ik\cdot x} + a^\star(\bar{k})e^{-ik\cdot x})(a(\bar{k}')e^{ik'\cdot x} + a^\star(\bar{k}')e^{-ik'\cdot x})] - \int d^3x\Omega$$ (۸۶.۱)

$$= \frac{1}{2}\int \widetilde{dk}\widetilde{dk'}d^3x[(-\omega\omega' a(\bar{k})a(\bar{k}')e^{i(k+k')\cdot x} + \omega\omega' a(\bar{k})a^\star(\bar{k}')e^{i(k-k')\cdot x}$$ (۸۷.۱)

$$+\omega\omega' a^\star(\bar{k})a(\bar{k}')e^{-i(k-k')\cdot} - \omega\omega' a^\star(\bar{k})a^\star(\bar{k}')e^{-i(k+k')\cdot x})$$ (۸۸.۱)

$$+(-\bar{k}\cdot\bar{k}'a(\bar{k})a(\bar{k}')e^{i(k+k')\cdot x} + \bar{k}\cdot\bar{k}'a(\bar{k})a^\star(\bar{k}')e^{i(k-k')\cdot x}$$ (۸۹.۱)

$$+\bar{k}\cdot\bar{k}'a^\star(\bar{k})a(\bar{k}')e^{-i(k-k')\cdot x} - \bar{k}\cdot\bar{k}'a^\star(\bar{k})a^\star(\bar{k}')e^{-i(k+k')\cdot x})$$ (۹۰.۱)

$$+m^2(a(\bar{k})a(\bar{k}')e^{i(k+k')\cdot x} + a(\bar{k})a^\star(\bar{k}')e^{i(k-k')\cdot x}$$ (۹۱.۱)

$$+a^\star(\bar{k})a(\bar{k}')e^{-i(k-k')\cdot x} + a^\star(\bar{k})a^\star(\bar{k}')e^{-i(k+k')\cdot x})$$ (۹۲.۱)

$$-V\Omega$$ (۹۳.۱)

که V حجم فضا است که از انتگرال روی $\int d^3x$ می‌آید. بنابراین، از این واقعیت که $\int d^3x e^{i\bar{x}\cdot\bar{y}} =$

$(2\pi)^3\delta^3(\bar{y})$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}(2\pi)^3\int \widetilde{dk}\widetilde{dk'}[\delta^3(\bar{k}-\bar{k}')(\omega\omega'+\bar{k}\cdot\bar{k}'+m^2)(a^\star(\bar{k})a(\bar{k}')e^{-i(\omega-\omega')t}+a(\bar{k})a^\star(\bar{k}')e^{-i(\omega-\omega')t} && (۹۴.۱)\\
&\quad +\delta^3(\bar{k}+\bar{k}')(-\omega\omega'-\bar{k}\cdot\bar{k}'+m^2)(a(\bar{k})a(\bar{k}')e^{-i(\omega+\omega')t}+a^\star(\bar{k})a^\star(\bar{k}')e^{i(\omega+\omega')t} && (۹۵.۱)\\
&\quad -V\Omega && (۹۶.۱)\\
&= \frac{1}{2}\int \widetilde{dk}\frac{1}{2\omega}[(\omega^2+\bar{k}^2+m^2)(a^\star(\bar{k})a(\bar{k})+a(\bar{k})a^\star(\bar{k})) && (۹۷.۱)\\
&\quad +(-\omega^2+\bar{k}^2+m^2)(a(\bar{k})a(-\bar{k})e^{-2i\omega t}+a^\star(\bar{k})a^\star(-\bar{k})e^{2i\omega t})]-V\Omega && (۹۸.۱)
\end{aligned}$$

در نهایت، با استفاده از تعریف ω (معادله‌ی (۷۱.۱)) خواهد شد

$$H=\frac{1}{2}\int \widetilde{dk}\ \omega(a^\star(\bar{k})a(\bar{k})+a(\bar{k})a^\star(\bar{k}))-V\Omega \qquad (۹۹.۱)$$

و حالا با استفاده از (۸۲.۱)، می‌توان این را بازنویسی کرد

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int \widetilde{dk}\ \omega(a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k})+a(\bar{k})a^\dagger(\bar{k}))-V\Omega && (۱۰۰.۱)\\
&= \frac{1}{2}\int \widetilde{dk}\ \omega(a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k})+(2\pi)^3 2\omega\delta^3(\bar{k}-\bar{k})+a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k}))-V\Omega && (۱۰۱.۱)\\
&= \int \widetilde{dk}\ \omega a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k})+\int \widetilde{dk}\ \omega(2\pi)^3\delta^3(0)-V\Omega && (۱۰۲.۱)\\
&= \int \widetilde{dk}\omega a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k})+\int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega}\omega(2\pi)^3\delta^3(0)-V\Omega && (۱۰۳.۱)\\
&= \int \widetilde{dk}\omega a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k})+\frac{1}{2}\delta^3(0)\int d^3\bar{k}-V\Omega && (۱۰۴.۱)
\end{aligned}$$

دقت کنید که جملات دوم و سوم بی‌نهایت هستند (با فرض این‌که حجم فضا V بی‌نهایت است). این ممکن است مشکل ساز باشد، اما بخاطر بیاورید که Ω یک مقدار دلخواه ثابت است. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$\Omega\equiv\frac{1}{2V}\delta^3(0)\int d^3\bar{k} \qquad (۱۰۵.۱)$$

و هامیلتونی زیر را باقی می‌گذارد

$$H=\int \widetilde{dk}\ \omega a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k}) \qquad (۱۰۶.۱)$$

بخاطر داشته باشیم که از طریق اندازه‌گیری فقط می‌توان تغییرات انرژی را آشکار کرد، و بنابراین بی‌نهایتی

که کسر می‌شود مقدار تجربی مورد اندازه‌گیری را تغییر نمی‌دهد. آن‌چه اینجا انجام دادیم این است که با کم کردن بخش بی‌نهایت به طریقی که فیزیک را تغییر ندهد، یک مثال بسیار ساده از **باز بهنجارش** است. بنا به دلایل مختلف، کمیت‌های قابل اندازه‌گیری در QFT دچار انواع مختلفی از بی‌نهایت‌ها می‌شوند. اما، این امکان وجود دارد که این بی‌نهایت‌ها را به روش خوش-تعریفی حذف کنیم، و بخش محدود آن را باقی بگذاریم. این بخش محدود، مقداری است که در طبیعت مشاهده می‌شود. دلیل این کار بسیار ژرف است. برای این‌که نتایج نظری با مقادیر تجربی هم‌خوانی داشته باشند، باز بهنجارش نتایج به صورت صحیح ضروری است.

بنابراین، بسط میدان (۷۹.۱) و روابط جابجایی (۸۲.۱) بدست آوردیم. دقت کنیم که روابط (۸۲.۱) شکل دقیق یک نوسان‌گر هماهنگ ساده است. بنابراین، چون ساختار مشابه نوسان‌گر هماهنگ را دارند، فیزیک مشابهی نیز دارند.

با مقایسه رابطه‌ی (۸۲.۱) با عمل‌گرهای نوسان‌گر هماهنگ، واضح است که $a^\dagger(\bar{k})$ یک ذره ϕ را با تکانه $\bar{k}$ و انرژی ω را *خلق* می‌کند، در حالی‌که عمل‌گر $a(\bar{k})$ ذره را *فنا* می‌کند. حالت بهنجار شده به این شکل خواهد بود

$$|\bar{k}\rangle = \sqrt{2\omega}a^\dagger(\bar{k})|0\rangle \qquad (۱۰۷.۱)$$

طیف کاملِ حالت‌ها می‌تواند با عمل کردن روی حالت پایه $|0\rangle$ توسط عمل‌گرهای خلق بدست آید، و محاسبه دامنه‌های احتمال برای یک حالت در حالت دیگر یافت شود ، $\langle\bar{k}_f|\bar{k}_i\rangle$، سر راست است. بطور طبیعی این نظریه درباره برهمکنش بین ذرات صحبتی نمی‌کند، و بنابراین باید آن را برای برهمکنش تغییر اساسی دهیم.

۳.۲.۱ قضیه‌ی آمار اسپین

حالت‌هایی که از رابطه‌ی (۱۰۷.۱) بدست می‌آیند شامل دو حالت ذره خواهند بود

$$|\bar{k};\bar{k}'\rangle = 2\sqrt{\omega\omega'}\ a^\dagger(\bar{k})a^\dagger(\bar{k}')|0\rangle \qquad (۱۰۸.۱)$$

اما روابط جابجایی (۸۲.۱) به ما می‌گوید که $a^\dagger(\bar{k})a^\dagger(\bar{k}') = a^\dagger(\bar{k}')a^\dagger(\bar{k})$. بنابراین، این نظریه اجازه این حالت را می‌دهد

$$|\bar{k}';\bar{k}\rangle = 2\sqrt{\omega'\omega}a^\dagger(\bar{k}')a^\dagger(\bar{k})|0\rangle \qquad (۱۰۹.۱)$$

از شیمی یا فیزیک جدید می‌دانیم که ذراتی با اسپین غیر صحیح از اصل طرد پائولی تبعیت می‌کنند، در حالی که ذراتی با اسپین صحیح این‌طور نیستند. میدان اسکالر ϕ صادق در معادله کلین گوردن بدون اسپین ($j = 0$) هستند، و بنابراین انتظار داریم که از طرد پائولی تبعیت نکنند. بنابراین نشانه این است که نظریه را به درستی کوانتیزه کرده‌ایم.

اما توجه نمایید که این نتیجه‌ی آماری (که میدان‌های اسکالر از طرد پائولی تبعیت نمی‌کنند) تماما یک نتیجه از روابط جابجایی است. بنابراین، اگر تلاش کنیم تا میدان اسپین ۱/۲ را به همان طریق کوانتیزه کنیم، به وضوح از طرد پائولی تبعیت نخواهد کرد. باید میدان اسپین ۱/۲ را به شکل دیگری کوانتیزه کنیم.

روش صحیح استفاده از کوانتیزه کردن میدان‌های اسپین ۱/۲ این است که به جای استفاده از روابط جابجایی مانند آنچه برای میدانی‌های اسکالر استفاده کردیم، از روابط پاد جابجایی استفاده کنیم. اگر عمل‌گر میدان‌های اسپین ۱/۲ از قاعده زیر پیروی کند

$$\{a_1^\dagger, a_2^\dagger\} = a_1^\dagger a_2^\dagger = 0 \Rightarrow a_1^\dagger a_2^\dagger = -a_2^\dagger a_1^\dagger \tag{۱۱۰.۱}$$

سپس اگر سعی کنیم تا دو بار یک عمل‌گر را اثر دهیم، خواهیم داشت

$$a_1^\dagger a_1^\dagger |0\rangle = -a_1^\dagger a_1^\dagger |0\rangle \Rightarrow a_1^\dagger a_1^\dagger |0\rangle = 0 \tag{۱۱۱.۱}$$

به عبارت دیگر، اگر با روابط پادجابجایی کوانتیزه کنیم، برای دو ذره غیر ممکن نخواهد بود تا همان حالت را بطور همزمان اشغال کنند.

این رابطه که اسپینِ یک ذره و آماری که از آن پیروی می‌کند (که تقاضا می‌کند ذرات اسپین صحیح از روابط جابجایی و ذرات اسپین نیم صحیح با روابط پادجابجایی کوانتیزه می‌شوند) قضیه‌ی اسپین–آمار نامیده می‌شود.

و به همین دلیل ذراتی که از اصل طرد پائولی پیروی می‌کنند آمار بوز–اینشتین، و ذراتی که از طرد پائولی تبعیت نمی‌کنند آمار فرمی–دیراک گفته می‌شود. ذرات اسپین صحیح را بوزون و اسپین نیم–صحیح را فرمیون می‌نامیم.

۴.۲.۱ میدان‌های چپ‌گرد و راست‌گرد

از لاگرانژی دیراک (۳۱.۱) می‌دانیم که میدان بنیادی اسپینور ۴–مؤلفه‌ای $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ که ψ_L تحت نمایش چپ‌گرد گروه لورنتز $(0, 1/2)$ تبدیل می‌شود، و ψ_R تحت نمایش راست‌گرد $(1/2, 0)$ تبدیل می‌شود.

بطور کلی، اسپینورهای ۲-مؤلفه‌ای را به عنوان میدان‌های **وایل**[1] می‌شناسیم. بنابراین، فرمیون، ترکیب اسپینوری از دو میدان وایل است، یکی ذرات چپ‌گرد، و دیگری پادذرات راست‌گرد.
همچنین در رابطه‌ی (۳۱.۱) میدانی که تعریف کردیم $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger)$ بود. اگر $\bar{\psi}$ را به عنوان همیوغ ψ تفسیر می‌کنیم، سپس می‌بینیم که میدان راستگرد همیوغ میدان چپگرد است و بالعکس. یا به عبارت دیگر

$$\psi_L^\dagger = \psi_R \qquad \text{و} \qquad \psi_R^\dagger = \psi_L \tag{۱۱۲.۱}$$

از امتیاز این واقعیت برای نوشتن همه میدان‌ها بر حسب میدان‌های چپگرد وایل استفاده می‌کنیم. برای مثال، دو میدان وایل چپگرد χ و ξ را داریم، می‌توانیم اسپینور ۴-مؤلفه‌ای $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi^\dagger \end{pmatrix}$ را تشکیل دهیم، و بنابراین $\bar{\psi} = (\xi, \chi^\dagger)$. چنین میدانی را یک **میدان دیراک** می‌نامیم و با ψ_D نمایش می‌دهیم.
به عبارت دیگر، می‌توانیم اسپینور ۴-مؤلفه‌ای بر حسب یک میدان وایل منفر چپگرد χ تعریف کنیم، یا $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi^\dagger \end{pmatrix}$. اما اکنون توجه کنید که $\bar{\psi} = (\chi, \chi^\dagger)$، که برابر با ترانهاده‌ی ψ است. به چنین میدانی (که همیوغ آن برابر با ترا نهاده‌ی آن است) **میدان مایورانا**[2] گفته می‌شود و با ψ_M نمایش داده می‌شود.
بخاطر داشته باشیم که یک پادذره جرم برابر با ذره اصلی دارد و دستگردی مخالف آن ذره دارد. بنابراین، اگر با میدان دیراک ψ_D کار کنیم، می‌توانیم با را صرفا با جابجایی χ و ξ تغییر دهیم، با استفاده از عملگر **همیوغ بار** $\mathcal{C}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{C}\psi_D = \mathcal{C}\begin{pmatrix} \chi \\ \xi^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi^\dagger \end{pmatrix} \tag{۱۱۳.۱}$$

همچنین، ترا نهاده‌ی $\bar{\psi}_D$ را در نظر گیرید، $\bar{\psi}_D^T = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi^\dagger \end{pmatrix}$. با عملگر $\mathcal{C}$ عمل می‌کنیم

$$\mathcal{C}\bar{\psi}_D^T = \mathcal{C}\begin{pmatrix} \xi \\ \chi^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi^\dagger \end{pmatrix} = \psi_D \tag{۱۱۴.۱}$$

[1] Weyl
[2] Majorana

بنابراین، داریم

$$\mathcal{C}\psi_D = \bar{\psi}_D^T \qquad \text{و} \qquad \mathcal{C}\bar{\psi}_D^T = \psi_D \tag{۱۱۵.۱}$$

بنابراین، می‌گوییم که ψ_D و $\bar{\psi}_D^T$ **همیوغ بار** یکدیگرند.
اما توجه کنید که با میدان مایورانا

$$\mathcal{C}\psi_M = \mathcal{C}\begin{pmatrix}\chi\\ \chi^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\chi\\ \chi^\dagger\end{pmatrix} = \psi_M \tag{۱۱۶.۱}$$

و

$$\mathcal{C}\bar{\psi}_M^T = \bar{\psi}_M^T = \psi_M \tag{۱۱۷.۱}$$

بنابراین بطور خلاصه، میدان‌های دیراک برابر با همیوغ بارشان نیستند، در حالی‌که میدان‌های مایورانا اینطور هستند. با مقایسه با میدان‌های اسکالر (که همیوغ مختلط عدد حقیقی برابر با خودش است، در حالی‌که همیوغ مختلط عدد مختلط اینطور نیست)، اغلب به میدان‌های مایورانا **حقیقی**، و میدان‌های دیراک را **مختلط** می‌نامیم.

بنابراین ، میذتوانیم لاگرانژی دیراک و مایورانا را بر حسب میدان‌های وایل به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathcal{L}_D = i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + i\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi - m(\chi\xi + \chi^\dagger\xi^\dagger) \tag{۱۱۸.۱}$$

$$\mathcal{L}_M = i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}m(\chi\chi + \chi^\dagger\chi^\dagger) \tag{۱۱۹.۱}$$

۵.۲.۱ کوانتش کانونی فرمیون‌ها

ابتدا فرمیون دیراک را کوانتیزه می‌کنیم. حل کلی معادله دیراک به صورت زیر است

$$\psi_D(x) = \sum_{s=1}^{2}\int \widetilde{dk}[b_s(\bar{k})u_s(\bar{k})e^{ik\cdot x} + d_s^\dagger(\bar{k})v_s(\bar{k})e^{-ik\cdot x}] \tag{۱۲۰.۱}$$

که $s=1,2$ دو حالت اسپین هستند، b_s و $d_s^\dagger$ عمل‌گرهای پایین برنده برای ذرات و بالا برنده برای پادذرات هستند. همیوغ بارِ ψ_D عمل‌گر بالابرنده برای ذره و پایین برنده برای پادذره خواهد داشت.
کمیت‌های u_s و v_s بردارهای چهار–مؤلفه‌ای هستند که به عنوان پایه برای دیگر حالت‌های ذره/پادذره در

فضای اسپینور عمل می‌کنند.

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، با استفاده از روابط پاد-جابجایی کوانتیزه می‌کنیم. با نوشتن تنها رابطه غیر صفر

$$\{\psi_\alpha(t,\bar{x}), \bar{\psi}_\beta(t,\bar{x})\} = \delta^3(\bar{x}-\bar{x}')(\gamma^0)_{\alpha\beta} \tag{۱۲۱.۱}$$

این رابطه دلالت بر این دارد که تنها رابطه‌ی جابجایی غیر صفر بر حسب عمل‌گرها عبارتند از:

$$\{b_s(\bar{k}), b^\dagger_{s'}(\bar{k}')\} = (2\pi)^3\delta^3(\bar{k}-\bar{k}')2\omega\delta_{ss'} \tag{۱۲۲.۱}$$

$$\{d^\dagger_s(\bar{k}), d_{s'}(\bar{k}')\} = (2\pi)^3\delta^3(\bar{k}-\bar{k}')2\omega\delta_{ss'} \tag{۱۲۳.۱}$$

یک بار دیگر، این‌ها جبر نوسان‌گر هماهنگ ساده را شکل می‌دهند، و میذتوان کل طیف حالت‌ها را با استفاده از $|0\rangle$ به همراهِ $b^\dagger_s$ و $d^\dagger_s$ به دست آورد.

سپس، با پیروی از سری محاسبات تقریبا یکسانی که در بخش‌های قبل انجام شد، به هامیلتونی زیر می‌توان رسید

$$H = \sum_{s=1}^{2}\int \widetilde{dk}\,\omega[b^\dagger_s(\bar{k})b_s(\bar{k}) + d^\dagger_s(\bar{k})d_s(\bar{k})] - \lambda \tag{۱۲۴.۱}$$

که λ ثابت بی‌نهایتی است که می‌توانیم صرفا کم کنیم و از آن صرف نظر نماییم.

با مقایسه‌ی روابط (۱۰۶.۱) و (۱۲۴.۱) ، مشاهده می‌کنیم که هر دو الزاما شکل یکسانی دارند؛ ω (که انرژی است) سمت چپ عمل‌گر خلق، که سمت چپ عمل‌گر فنا است. برای درک معنای این عبارت، خواهیم دید که چطور ویژه حالت‌های انرژی را تولید می‌کند. از معادله‌ی (۱۰۶.۱) برای سادگی استفاده خواهیم کرد.

فرض کنیم با عمل‌گر هامیلتونی روی حالت دلخواه $|\bar{p}\rangle$ عمل می‌کنیم. با استفاده از (۱۰۷.۱) داریم،

$$
\begin{aligned}
H|\bar{p}\rangle &= \int \widetilde{dk}\omega_k a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k})|\bar{p}\rangle = \int \widetilde{dk}\omega_k a^\dagger(\bar{k})a(\bar{k})\sqrt{2\omega_p}a^\dagger(\bar{p})|0\rangle && (۱۲۵.۱)\\
&= \int \widetilde{dk}\omega_k \sqrt{2\omega_p}a^\dagger(\bar{k})\big((2\pi)^3 2\omega_p\delta^3(\bar{k}-\bar{p}) + a^\dagger(\bar{p})a(\bar{k})\big)|0\rangle && (۱۲۶.۱)\\
&= \int \widetilde{dk}\omega_k \sqrt{2\omega_p}a^\dagger(\bar{k})(2\pi)^3 2\omega_p\delta^3(\bar{k}-\bar{p})|0\rangle && (۱۲۷.۱)\\
&= \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k}\omega_k \sqrt{2\omega_p}a^\dagger(\bar{k})(2\pi)^3 2\omega_p\delta^3(\bar{k}-\bar{p})|0\rangle && (۱۲۸.۱)\\
&= \int d^3\bar{k}\sqrt{2\omega_p}a^\dagger(\bar{k})\omega_p\delta^3(\bar{k}-\bar{p})|0\rangle && (۱۲۹.۱)\\
&= \omega_p\sqrt{2\omega_p}a^\dagger|0\rangle = \omega_p|\bar{p}\rangle && (۱۳۰.۱)
\end{aligned}
$$

بنابراین، $H|\bar{p}\rangle = \omega_p|\bar{p}\rangle$ است که $\omega_p = \bar{p}^2 + m^2$، معادله نسبیتی برای انرژی است. بنابراین، عملگر هامیلتونی ویژه مقدار انرژی مناسب روی حالت‌های کوانتومی فیزیکی را می‌دهد.

برای هامیلتونی دیراک ویژه مقدار ترکیب خطی از انرژی‌های هر نوع از ذرات خواهد بود. اگر حالت‌ها را به صورت $|\bar{p}_b,\ s_b;\bar{p}_d,\ s_d\rangle$ نشان دهیم، که دو عنصر اول حالت یک ذره نوع b و حالت دوم ذره نوع d را می‌دهد، خواهیم داشت

$$H|\bar{p}_b,\ s_b;\bar{p}_d,\ s_d\rangle = \cdots = (\omega_{p_b} + \omega_{p_d})|\bar{p}_b,\ s_b;\bar{p}_d,\ s_d\rangle \qquad (۱۳۱.۱)$$

برای میدان‌های مایورانا اوضاع ساده‌تر است. تنها یک نوع ذره داریم، بنابراین

$$\psi_M(x) = \sum_{s=1}^{2}\int \widetilde{dk}\big[b_s(\bar{k})u_s(\bar{k})e^{ik\cdot x} + b_s^\dagger(\bar{k})v_s(\bar{k})e^{-ik\cdot x}\big] \qquad (۱۳۲.۱)$$

و کوانتش با روابط پادجابجاگر نتیجه خواهد داد

$$H = \sum_{s=1}^{2}\int \widetilde{dk}\ \omega\ b_s^\dagger(\bar{k})b_s(\bar{k}) \qquad (۱۳۳.۱)$$

۳.۱ انتگرال مسیر و کوانتش انتگرال مسیر

یکی از بنیادی ترین آزمایش‌ها در مکانیک کوانتوم آزمایش **دو شکاف** است. بطور خلاصه، این آزمایش بیان می‌دارد که وقتی یک تک الکترون از میان یک صفحه با دو شکاف عبور می‌کند، و هیچ مشاهده‌ای مبنی بر

این‌که از کدام شکاف عبور می‌کند انجام نشده، در واقع الکترون از هر دو شکاف عبور می‌کند، و تا زمانی‌که اندازه‌گیری انجام شود، در یک حالت برهم‌نهی از دو مسیر ممکن است. در نتیجه، ذره یک الگوی موجی از خود به جای می‌گذارد، و الگوی مشاهده شده روی صفحه یک الگوی تداخلی است- مشابه امواج کلاسیک وقتی که از مسیرهای دو شکاف عبور می‌کنند- همه مسیرهای برهم‌نهی تک الکترون با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند، هم تداخل سازنده و هم ویران‌گر. وقتی الکترون مورد مشاهده قرار بگیرد، به صورت احتمالاتی به یکی از حالت‌های ممکن رمبش می‌نماید (یکی از مکان‌های ممکن روی صفحه نمایش).

از طرف دیگر، اگر مکانیزمی برای مشاهده‌ی این‌که الکترون از کدامیک از دو شکاف عبور می‌کند، مشاهده قبل از مشاهده صفحه نمایش انجام شده، و دیگر الگوی برهم‌نهی نداریم، و بنابراین دیگر الگوی تداخل نیز نمی‌بینیم.

معنای این پدیده این است که ذره تا زمانی که مشاهده نشد باشد در واقع هر مسیر ممکن را به یکباره طی می‌کند. وقتی مشاهده شد، احتمال مرتبط با هر مسیری وجود دارد. برخی مسیرها محتمل‌تر و برخی کمتر احتمال دارند (یا تقریبا غیر ممکن‌اند). اما تا زمان مشاهده، ذره در در حالت برهم‌نهی از مسیرهای ممکن است.

بنابراین، برای کوانتش، باید یک عبارت ریاضی برای «جمع روی همه مسیرهای ممکن» بیابیم. این عبارت را به عنوان **انتگرال مسیر** می‌شناسند، و اثبات خواهد شد که روش بسیار مفیدتری برای کوانتش یک سیستم فیزیکی است.

ساخت این انتگرال را با در نظر گرفتن صرفِ دامنه یک ذره در مکان q_1 در زمان t_1 که به مکان q_2 در زمان t_2 انتشار می‌یابد آغاز می‌کنیم. این دامنه خواهد بود

$$\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle = \langle q_2 | e^{iH(t_2-t_1)} | q_1 \rangle \tag{۱۳۴.۱}$$

برای محاسبه این، با تقسیم کردن بازه زمانی $T \equiv t_2 - t_1$ به $N+1$ بازه مساوی با طول $\delta t = \frac{T}{N+1}$ آغاز می‌کنیم. بنابراین، N مجموعه کامل از ویژه حالت‌های مکان را وارد می‌کنیم،

$$\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} dQ_i \langle q_2 | e^{-iH\delta t} | Q_N \rangle \langle Q_N | e^{-iH\delta t} | Q_{N-1} \rangle \cdots \langle Q_1 | e^{-iH\delta t} | q_1 \rangle \tag{۱۳۵.۱}$$

می‌دانیم که تقریبا در همه نظریه‌های فیزیکی، می‌توان هامیلتونی را به صورت $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ بشکنیم.

بنابراین، با استفاده از کامل بودن ویژه حالت‌های تکانه داریم

$$\begin{aligned}
\langle Q_{i+1}|e^{-iH\delta t}|Q_i\rangle &= \langle Q_{i+1}|e^{-i\left(\frac{P^2}{2m}+V(Q)\right)\delta t}|Q_i\rangle && (۱.۱۳۶)\\
&= \langle Q_{i+1}|e^{-i\delta t\frac{P^2}{2m}}e^{-i\delta t V(Q)}|Q_i\rangle && (۱.۱۳۷)\\
&= \int dP'\langle Q_{i+1}|e^{-i\delta t\frac{P^2}{2m}}|P'\rangle\langle P'|e^{-i\delta t V(Q)}|Q_i\rangle && (۱.۱۳۸)\\
&= \int dP' e^{-i\delta t\frac{P'^2}{2m}}e^{-i\delta t V(Q_i)}\langle Q_{i+1}|P'\rangle\langle P'|Q_i\rangle && (۱.۱۳۹)\\
&= \int dP' e^{-i\delta t\frac{P'^2}{2m}}e^{-i\delta t V(Q_i)}\frac{e^{iP'Q_{i+1}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-iP'Q_i}}{\sqrt{2\pi}} && (۱.۱۴۰)\\
&= \int \frac{dP'}{2\pi}e^{iH\delta t}e^{iP'(Q_{i+1}-Q_i)} && (۱.۱۴۱)\\
&= \int \frac{dP'}{2\pi}e^{i\left[P'(Q_{i+1}-Q_i)-H\delta t\right]} && (۱.۱۴۲)\\
&= \int \frac{dP'}{2\pi}e^{i\delta t\left[P'\left(\frac{Q_{i+1}-Q_i}{\delta t}\right)-H\right]} && (۱.۱۴۳)
\end{aligned}$$

و با حدگیری در حالت $\delta t\to 0$ ، $\frac{Q_{i+1}-Q_i}{\delta t}\to \dot{Q}_i$. بنابراین

$$\int \frac{dP'}{2\pi}e^{i\delta t\left[P'\left(\frac{Q_{i+1}-Q_i}{\delta t}\right)-H\right]} = \int \frac{dP'}{2\pi}e^{idt_{i+1}[P'\dot{Q}_i-H]} \qquad (۱.۱۴۴)$$

بنابراین، می‌توانیم این را در رابطه‌ی (۱.۱۳۵) و حدگیری $\delta t\to 0$ داریم

$$\begin{aligned}
\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}dQ_i\langle q_2|e^{-iH\delta t}|Q_N\rangle\langle Q_N|e^{-iH\delta t}|Q_{N-1}\rangle\cdots\langle Q_1|e^{-iH\delta t}|q_1\rangle && (۱.۱۴۵)\\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}dQ_i\int\frac{dP'_i}{2\pi}e^{idt_2[P'_N\dot{Q}_N-H]}e^{idt_N[P'_{N-1}\dot{Q}_{N-1}-H]}\dots e^{idt_1[P'_1\dot{Q}_1-H]} && (۱.۱۴۶)\\
&\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}p\mathcal{D}q\; e^{-i\int_{t_1}^{t_2}dt(p\dot{q}-H)} && (۱.۱۴۷)
\end{aligned}$$

که $\mathcal{D}p=\prod_{i=1}^{\infty}dp_i$ و $\mathcal{D}q=\prod_{i=1}^{\infty}dq_i$ هستند.

و اگر p به صورت مربعی باشد (همان‌طور که همیشه هست $\frac{p^2}{2m}$)، می‌توان صرفا یک انتگرال گاوسی روی p گرفت، که نتیجه آن یک ثابت کلی است که آن را جذب عبارت می‌کنیم وقتی که می‌خواهیم بهنجار نماییم. پس، با شناخت اینکه انتگرال‌ده در نما هست $p\dot{q}-H=\mathcal{L}$، داریم

$$\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle = \int\mathcal{D}q\; e^{i\int_{t_1}^{t_2}dt\mathcal{L}} = \int\mathcal{D}q e^{iS} \qquad (۱.۱۴۸)$$

بطور معمول، محک رابطه‌ی (۱۴۸.۱) تعداد بی‌شماری دیفرانسیل دارد، و بنابراین محاسبه‌ی آن نیازمند تعداد بی‌شماری انتگرال است. این امر قابل انتظار هم هست چون نقطه‌ی انتگرال مسیر جمع روی همه مسیرهای ممکن است، که تعدادشان بی‌شمار است. بنابراین، چون به وضوح نمی‌توانیم انتگرال‌های بی‌شماری را انجام دهیم، باید یک روش هوشمندانه‌تر برای محاسبه‌ی (۱۴۸.۱) بیابیم. اما قبل از این کار کمی درباره تفسیر انتگرال مسیر بحث خواهیم کرد

۱.۳.۱ تفسیر انتگرال مسیر

معادله‌ی (۱۴۸.۱) بیان می‌کند که در هر پیکربندی اولیه و نهایی (q_1, t_1) و (q_2, t_2)، مطلقا هر مسیری بین آن‌ها امکان دارد. این محتوای بخش $\mathcal{D}q$ است: جمع روی همه مسیرها.

پس، برای هر یک از مسیرها، انتگرال یک وزن آماری e^{iS} به آن نسبت می‌دهد، که کنش S با استفاده از آن مسیر محاسبه شده است.

بنابراین، یک مسیر دلخواه q_0 را فرض کنید، که وزن آماری $e^{iS[q_0]}$ می‌گیرد. حال، یک مسیر q' نزدیک به q_0 فرض کنید، که تنها با مقدار کوچکی از هم اختلاف دارند: $q' = q_0 + \epsilon\delta q_0$. این یک وزن آماری $e^{iS[q_0+\epsilon\delta q_0]} = e^{iS[q_0]+i\epsilon\delta q_0 \frac{\delta S[q_0]}{\delta q}}$ خواهد داشت، که جمله $\frac{\delta S}{\delta q}$ مشتق اویلر-لاگرانژ است.

$$\frac{\delta S}{\delta q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial S}{\partial q} \qquad (۱۴۹.۱)$$

برای اینکه منظورمان روشن‌تر باشد، یک چرخش ویک[3] انجام می‌دهیم، با فرض $t \to it$، پس $dt \to idt$ و $S = \int dt\mathcal{L} \to i\int dt\mathcal{L} = iS$ و همچنین $e^{iS} \to e^{-S}$. حال، مسیر $q' = q_0 + \epsilon\delta q_0$، وزن آماری $e^{iS[q_0]}e^{-i\epsilon\delta q_0 \frac{\delta S[q_0]}{\delta q}}$ را می‌گیرد.

بنابراین، اگر $\frac{\delta S}{\delta q}$ خیلی بزرگ باشد، پس وزن آماری به صورت نمایی کوچک خواهد بود. به عبارت دیگر، هرچه تغییرات کنش بیشتر باشد، احتمال آن مسیر کمتر است.

بنابراین محتمل‌ترین مسیر این است که کوچکترین مقدار $\frac{\delta S}{\delta t}$ را داشته باشد، یا جایی که $\frac{\delta S}{\delta q} = 0$ باشد. این مسیر دارای **کمترین کنش** است. بنابراین، در تقریب اول مکانیک کوانتوم، مکانیک کلاسیک را بدست آورده‌ایم.

بنابراین، معنای انتگرال مسیر این است که همه مسیرهای قابل تصور برای ذره ممکن هستند. اما، همه مسیرها احتمال یکسانی ندارند. درست‌نمایی یک مسیر با کنش نمایی شده داده می‌شود، و بنابراین محتمل‌ترین مسیرهای ممکن آن‌هایی هستند که کمترین کنش را دارند. این دلیل آن است که، از نظر بزرگ مقیاس، جهان کلاسیکی به نظر می‌رسد. درست‌نمایی هر ذره مثلا یک توپ بیسبال، همزمان مسیر قابل توجهی دور از مسیر

[3] Wick

کمترین کنش را که قابل صرف نظر کردن است می‌پیماید.

۲.۳.۱ مقادیر چشم‌داشتی

حال که روش یافتن دامنه‌ی $\langle q_2, t_2|q_1, t_1\rangle$ را داریم، سوال طبیعی این است که چطور مقادیر چشم‌داشتی نظیر $\langle q_2, t_2|Q(t')|q_1, t_1\rangle$ یا $\langle q_2, t_2|P(t')|q_1, t_1\rangle$ را بیابیم. با انجام محاسبات مشابه بخش قبل، می‌توان نشان داد که

$$\langle q_2, t_2|Q(t')|q_1, t_1\rangle = \cdots = \int \mathcal{D}q\ Q(t')e^{iS} \qquad (۱۵۰.۱)$$

نشان خواهیم داد که محاسبه‌ی انتگرال‌هایی به این شکل از طریق **مشتقات تابعی** بسیار ساده‌تر است. برای یک تابع $f(x)$، مشتق تابعی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\delta}{\delta f(y)} f(x) \equiv \delta(x-y) \qquad (۱۵۱.۱)$$

سپس، انتگرال مسیر را با اضافه کردن تابع **چشمه خارجی کمکی** تغییر می‌دهیم

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + f(t)Q(t) + h(t)P(t) \qquad (۱۵۲.۱)$$

بنابراین حالا داریم

$$\langle q_2, t_2|q_1, t_1\rangle_{f,h} = \int \mathcal{D}q\ e^{\int dt(\mathcal{L}+fQ+hP)} \qquad (۱۵۳.۱)$$

که اجازه می‌دهد مقادیر چشم‌داشتی را به شکل زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}\langle q_2, t_2|Q(t')|q_1, t_1\rangle &= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t')}\langle q_2, t_2|q_1, t_1\rangle_{f,h}\Big|_{f,h=0} = \int \mathcal{D}qQ(t')e^{iS+i\int dt(fQ+hP)}\Big|_{f,h=0} \qquad (۱۵۴.۱)\\ &= \int \mathcal{D}qQ(t')e^{iS} \qquad (۱۵۵.۱)\end{aligned}$$

و یا

$$\langle q_2, t_2|P(t')|q_1, t_1\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta h(t')}\langle q_2, t_2|q_1, t_1\rangle_{f,h}\Big|_{f,h=0} = \int \mathcal{D}qP(t')e^{iS+i\int dt(fQ+hP)}\Big|_{f,h=0} \quad (۱۵۶.۱)$$

$$= \int \mathcal{D}qP(t')e^{iS} \quad (۱۵۷.۱)$$

پس، وقتی $\langle q_2, t_2|q_1, t_1\rangle$ را داریم، می‌توانیم هر مقدار چشم‌داشتی که می‌خواهیم به سادگی با مشتق‌های تابعی متوالی حساب کنیم.

۳.۳.۱ انتگرال‌های مسیر با میدان‌ها

از آن‌جا که می‌توانیم هر حالتی که بخواهیم با اعمال عمل‌گرها روی حالت خلاء بسازیم، کمیت مهم مقدار چشم‌داشتی خلاء به خلاء یا VEV است، $\langle 0|0\rangle$، و مقادیر چشم‌داشتی مختلفی می‌توان از طریق مشتق‌های تابعی ساخت. ($\langle 0|\phi\phi|0\rangle$ ، $\langle 0|\psi\phi\phi|0\rangle$ و غیره)

برای سادگی یک میدان اسکالر بوزونی ϕ را در نظر بگیرید. لاگرانژی چنین میدانی در رابطه‌ی (۸.۱.۱) توصیف شده است. با استفاده از این، می‌توانیم انتگرال مسیر را بنویسیم

$$\langle 0|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2\right]} \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x\mathcal{L}_0} \quad (۱۵۸.۱)$$

سرانجام مقادیر چشم‌داشتی را می‌خواهیم بیابیم، بنابراین میدان کمکی J را معرفی می‌کنیم

$$\langle 0|0\rangle_J = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_0+J\phi)} \quad (۱۵۹.۱)$$

بنابراین برای مثال، داریم $\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\langle 0|0\rangle_J\big|_{J=0}$.

البته، همچنان یک انتگرال مسیر با تعداد بی‌نهایت انتگرال داریم که باید حساب شوند. اما، سرانجام قادریم درباره چگونگی محاسبه آن حرف بزنیم.

تعریف می‌کنیم $Z_0(J) \equiv \langle 0|0\rangle_J$. سپس با استفاده از تبدیل فوریه ϕ

$$\widetilde{\phi}(k) = \int d^4x\, e^{-ikx}\phi(x) \qquad \phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ikx}\widetilde{\phi}(k) \quad (۱۶۰.۱)$$

با شروع از بخش $\mathcal{L}_0$ داریم:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \int d^4x\mathcal{L}_0 = \int d^4x\Big(-\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\Big) && (۱۶۱.۱)\\
&= \int d^4x\Big[-\frac{1}{2}\partial^\mu\Big(\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x}\widetilde{\phi}(k)\Big)\partial_\mu\Big(\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}e^{ik'\cdot x}\widetilde{\phi}(k')\Big) && (۱۶۲.۱)\\
&\qquad -\frac{1}{2}m^2\Big(\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x}\widetilde{\phi}(k)\Big)\Big(\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}e^{ik'\cdot x}\widetilde{\phi}(k')\Big) && (۱۶۳.۱)\\
&= \int d^4x\Big[\frac{1}{2}\int\frac{d^4kd^4k'}{(2\pi)^8}e^{ik\cdot x}e^{ik'\cdot x}\widetilde{\phi}(k)\widetilde{\phi}(k')(k^\mu k'_\mu - m^2)\Big] && (۱۶۴.۱)\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{d^4kd^4k'}{(2\pi)^8}\widetilde{\phi}(k)\widetilde{\phi}(k')(k^\mu k'_\mu - m^2)\int d^4x e^{i(k+k')\cdot x} && (۱۶۵.۱)\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{d^4kd^4k'}{(2\pi)^8}\widetilde{\phi}(k)\widetilde{\phi}(k')(k^\mu k'_\mu - m^2)(2\pi)^4\delta^4(k+k') && (۱۶۶.۱)\\
&= -\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\widetilde{\phi}(k)(k^2+m^2)\widetilde{\phi}(-k) && (۱۶۷.۱)
\end{aligned}
$$

پس، با تبدیل کردن بخش میدان کمکی

$$
\begin{aligned}
\int d^4xJ(x)\phi(x) &= \int d^4x\Big(\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x}\widetilde{J}(k)\Big)\Big(\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}e^{ik'\cdot x}\widetilde{\phi}(k')\Big) && (۱۶۸.۱)\\
&= \int\frac{d^4kd^4k'}{(2\pi)^8}\widetilde{J}(k)\widetilde{\phi}(k')\int d^4x e^{i(k+k')\cdot x} && (۱۶۹.۱)\\
&= \int\frac{d^4kd^4k'}{(2\pi)^8}\widetilde{J}(k)\widetilde{\phi}(k')(2\pi)^4\delta^4(k+k') && (۱۷۰.۱)\\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\widetilde{J}(k)\widetilde{\phi}(-k) && (۱۷۱.۱)
\end{aligned}
$$

و به دلیل این‌که انتگرال روی همه k^μ است، می‌توانیم به این صورت بازنویسی نماییم

$$
\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\widetilde{J}(k)\widetilde{\phi}(-k) = \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\big(\widetilde{J}(k)\widetilde{\phi}(-k) + \widetilde{J}(-k)\widetilde{\phi}(k)\big) \qquad (۱۷۲.۱)
$$

بنابراین

$$
S = \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big[-\widetilde{\phi}(k)(k^2+m^2)\widetilde{\phi}(-k) + \widetilde{J}(k)\widetilde{\phi}(-k) + \widetilde{J}(-k)\widetilde{\phi}(k)\Big] \qquad (۱۷۳.۱)
$$

حال، تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم

$$
\widetilde{\chi}(k) \equiv \widetilde{\phi}(k) - \frac{\widetilde{J}(k)}{k^2+m^2} \qquad (۱۷۴.۱)
$$

(این تغییر متغیر معیار انتگرال مسیر را دست نخورده باقی می‌گذارد: $\mathcal{D}\phi \to \mathcal{D}\chi$.)
با قرار دادن این داریم

$$S = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big[\;-\; \Big(\widetilde{\chi}(k) + \frac{\widetilde{J}(k)}{k^2+m^2}\Big)(k^2+m^2)\Big(\widetilde{\chi}(-k) + \frac{\widetilde{J}(-k)}{k^2+m^2}\Big) \tag{۱۷۵.۱}$$

$$+ \;\; \widetilde{J}(k)\Big(\widetilde{\chi}(-k) + \frac{\widetilde{J}(-k)}{k^2+m^2}\Big) + \widetilde{J}(-k)\Big(\widetilde{\chi}(k) + \frac{\widetilde{J}(k)}{k^2+m^2}\Big) \tag{۱۷۶.۱}$$

$$= \;\; \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big[-\widetilde{\chi}(k)(k^2+m^2)\widetilde{\chi}(-k) + \frac{\widetilde{J}(k)\widetilde{J}(-k)}{k^2+m^2}\Big] \tag{۱۷۷.۱}$$

در نهایت، انتگرال مسیر (۱۵۹.۱) می‌شود

$$\langle 0|0\rangle_J = \int \mathcal{D}\chi e^{\frac{i}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[-\widetilde{\chi}(k)(k^2+m^2)\widetilde{\chi}(-k) + \frac{\widetilde{J}(k)\widetilde{J}(-k)}{k^2+m^2}\right]} \tag{۱۷۸.۱}$$

حال، با استفاده از استدلال فیزیکی هوشمندانه، می‌توانیم چگونگی محاسبه‌ی تعداد بی‌نهایت انتگرال را در این عبارت بفهمیم. دقت کنید که اگر قرار دهیم $J = 0$، یک نظریه آزاد داریم که هیچ برهمکنشی در آن رخ نمی‌دهد. این بدین معناست که اگر از هیچ (خلاء) شروع کنیم، احتمال این‌که بعدا هیچ داشته باشیم ۱۰۰ درصد است. یا

$$\langle 0|0\rangle_J\Big|_{J=0} = 1 = \int \mathcal{D}\chi e^{\frac{i}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[-\widetilde{\chi}(k)(k^2+m^2)\widetilde{\chi}(-k)\right]} \tag{۱۷۹.۱}$$

و اگر آن بخش ۱ باشد، پس داریم

$$\langle 0|0\rangle_J = \int \mathcal{D}\chi e^{\frac{i}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\widetilde{J}(k)\widetilde{J}(-k)}{k^2+m^2}} \tag{۱۸۰.۱}$$

و بطور قابل توجهی، انتگرال‌ده هیچ وابستگی به χ ندارد! بنابراین، تعداد بی‌نهایت انتگرال روی همه مسیرهای ممکن تبدیل به چیزی بیش از یک ثابت نمی‌شود که می‌توانیم برای بازبهنجارش جذبش کنیم، چیزی که می‌ماند

$$\langle 0|0\rangle_J = e^{\frac{i}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\widetilde{J}(k)\widetilde{J}(-k)}{k^2+m^2}} \tag{۱۸۱.۱}$$

می‌توانیم به مختصات فضایی تبدیل فوریه معکوس کنیم تا بدست آوریم

$$Z_0(J) = \langle 0|0\rangle_J = e^{\frac{i}{2}\int d^4x d^4x' J(x)\Delta(x-x')J(x')} \quad (۱۸۲.۱)$$

که

$$\Delta(x-x') \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik\cdot(x-x')}}{k^2+m^2} \quad (۱۸۳.۱)$$

این جمله به عنوان **انتشارگر فاینمن** برای میدان اسکالر شناخته می‌شود.

پس می‌توانیم مقادیر چشم‌داشتی را با عمل کردن این به همراه $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}$ بیابیم.

می‌توانیم همه چیز را برای فرمیون‌ها تکرار کنیم ، و در حالی که بسیار پیچیده‌تر است، محاسبات مشابهی دارد. از اضافه کردن تابع کمکی $\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$ آغاز می‌کنیم، تا مقادیر چشم‌داشتی $\bar{\psi}$ و ψ را با استفاده از $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}$ و $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}$ بدست آوریم.

سپس هر جمله در نما را تبدیل فوریه می‌گیریم و وابستگی $\bar{\psi}$ و ψ را جدا می‌کنیم، تا اجازه یابیم جمله‌ای که به ψ و $\bar{\psi}$ وابسته است را برابر با ۱ قرار دهیم. تبدیل معکوس می‌دهد

$$Z_0(\eta,\bar{\eta}) = e^{i\int d^4x d^4x' \bar{\eta}(x)S(x-x')\eta(x')} \quad (۱۸۴.۱)$$

که داریم

$$S(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(-\gamma^\mu k_\mu + m)e^{ik\cdot(x-x')}}{k^2+m^2} \quad (۱۸۵.۱)$$

که انتشارگر فاینمن برای میدان‌های فرمیونی است.

میدان‌های کمکی J، η و $\bar{\eta}$ **میدان‌های چشمه** هستند. با مقایسه لاگرانژی در معادله‌ی (۱۵۹.۱) با حالت الکترومغناطیس، می‌توان فهمید که J، η و $\bar{\eta}$ از نظر ریاضیاتی مانند چشمه عمل می‌کنند، و منشاء میدانی هستند که به آن جفت شده‌اند، درست به همان طریقی که در الکترومغناطیس چشمه‌ی J^μ به میدان الکترومغناطیس A^μ جفت شده است. معنای پشت معادلات (۱۸۲.۱) و (۱۸۴.۱) این است که J مانند یک چشمه برای میدان‌ها عمل می‌کند و ϕ را در نقطه فضا–زمانی x تولید می‌کند، و در نقطه‌ی x' جذبش می‌کند. جمله‌ی $\Delta(x-x')$ و $S(x-x')$ پس نماینده‌ی عبارتی هستند که دامنه‌ی احتمال $\langle 0|0\rangle$ را برای رویدادی خاص می‌دهد. به عبارت دیگر، انتشارگر وزن آماری یک ذره برای حرکت از x به x' است.