•e~ mUi‹Á eh STeÂŽX

so£T…Ž •¾zd

ÑÓÙÓ „ÈT…ÆŽ Õ

Ã•U‹÷

ÀTd »dÃ€… ÄUÆn ÑÓÙÓ ¿eo‹hen ˆT‡U-€eUì¾¹dR Ã„Ç€ Äh P•e~ mUi‹Á ˆ„€ R
eÅ ÃeioŽd >e£›± eÆoŽd€€eT ÀTd •ÂÂ ˆ¾ sŠ„€ g¹e›½ R„ÇX€eT „€ ¿d†È½X •Ád
…T† sÁe•Á „€ •UÁdÈn s½ P€… ¼ÅdÈ~ ÄUÆn ˆ„€ ÀTd R d…h Ä d„ ST eÅ„d€È¾Á Ç
€… •ÅdÈ~ …UU§n Äo®Å …Å >en•¢e± ¿È÷ P•UÂ Áée÷ d„ Àd

?iiTb,ffrrrX/`QT#QtX+QKfb?f3jemF+bpD/y?kief ..2l:epyw1A/.*TZ/+rH

sŠÈU¾º›h CmcUÅ Ç STÈ›Š„d Cˆ

P•UŽ„È~ PÃe½ sÂ£T P¿e¾ŠX •Ž s½ ¼U‹²n ••h Ç€ Äh ¿eÆv STÈ›Š„d ˆT‡U- „
Ä P…¾± Cm{n Cˆº- x®›'d Äh eT PÃe½ †d …n ÀUTeë ¼¹e¢ Ç P•Á€…"s½ ÀU½
•nX Ç P dÈÅ eT €eh PfX P ÀU½† eT e~ Ã•Ž Äo~eŠ …"Â¢ „eÆ÷ †d ‡U÷ Ä¾
•Ád Ã•Ž Äo~eŠ ¼wÂëC…"Â¢ eT …Urd »eÁ Äh R ¼
Ç P¿X †d •£h dÈÅ CR s£Uiš Ãe"Rev PmŠd ¿X C„Ç€ Äh fX CR s£Uiš Ãe"Rev
e~ P¼T‡T…h R «…ž „€ d„ fX Ç e~ R „d•²½ …"d ¿e¾ŠX †d ¸i± Ç PeÅ ÀTd „Ç
»e‹vd Ç mŠd fX CR s£Uiš Ãe"Rev C…T† e~ CR s£Uiš Ãe"Rev STÈ›Š„d .yU
‰ …Å mŠd STÈ›Š„d ¸'d ÀTd R Ã•ÂÂ ¿eUh ShÈ~ Äh RÈ¹È½ …£Ž †d mUh ÀTd
•TÈ~ %¸'Ç C„e"†Ç„ •TÈv †eh U•TÈ~ %¸'d †d •

C m { n . ¼ ¹ e ¢ „ €   Ç … U Á … r d … h m … z s Â £ T   R … ‹ ± C m … z Ç P s £ U i š C m … z   m

s £ U i š C m … z   m Š d À U T e ë C m ¾ Š Ä h À o - „ ¼ Å f X C R s £ U i š C m … z   m Š d À U ½ †

m Š d m h e r C m ¢ … Š e h Ã … T d € C R Ç „ m … z s Á e ¾ Š X . » e ‹ v d C R s £ U i š

R … ‹ ± ‰ ë P m ‹ U Á s £ U i š m … z À T d   € È Ž s ½ e Å „ ¿ e ¾   † d Ä   R … U n   ® s ½ P • T …

„ €   € „ d € s … { ½ e ¾ o z € Ç „ s ½ - e h C m ¾ Š Ä h d • o h d … U n … " d   m ‹ U Á À ‹ ¾ ½   … { ½

d È Å P ¿ e ¾   Ã † † d … U n C ¿ • Ž d • v † d • £ h • Â o ® " s ½ ¿ e U T È › Š „ d V Ä ÷ Ã † † d … U n

€ Ç … h - e h Ä h Ä   • Â   s ½ € „ d Ç Ç … U Á …

¼ U Á d È n s ½ F d = k v € „ e Ž ¹ ½ h À R T d Ä ¹ € e £ ½ s Â £ T P • Á d g Š e Â o ½ ¼ Å e h m ¢ … Š Ç Ç … U Á

ˆ T À ¦ Ç „ P • Â   m … z À ¦ Ç „ „ € R ¼ ‹ v … " d   • T … U Ž h … Ÿ Á „ € À ¦ Ç „ e T f X % ¸ s ½ R · e U

P S T Ç … U Á ¼ ‹ v À T d Ä h = • U k Â ¼ T „ - d € È s Â £ T P • Â   s ½ € „ d Ç ¼ ‹ v Ä h m ¢ … Š e h g Š e Â

m Ž d € ¼ U Å d È ~ À n È U Á . » Ç € C ¿ È Á e ± … h e Â h ½

$$F + f = ma \qquad 1$$

$a=0$ ˜ … Ž e h • z C m ¢ … Š   • Š „ s ½ • z C m ¢ … Š Ä h Œ m ¢ … Š R l • ½ † d ‰ ë P • Â   m … z

¼ T „ d € Ä   m Š d € – d Ç P m ¹ e z À T d „ €   • T X s

$$F = kv: \qquad 2$$

C … Æ ì Š C ‡ … ½   Ã …   À T d C ‡ … ½   Ã • U i ‹ ÷   Ã e ½ C … Æ ì Š   À T „ È º h R d Ã …   Ä h Ä

Ä h P m Š d … U r d % ‰ Â v † d Ä   P ¼ Å   € „ e › ¢   … U n   • ~ … ÷ s ½ m h e r C m ¢ … Š e h „ È { ½

• £ h U g U n … n À U ¾ Å Ä h m Š d   Ã … Å †   • U Å e Á • £ h   m Š d Ã e ½ C … Æ ì Š . e £ Ž † d … d

e Å Ã „ e o Š C … Æ ì Š   • Á d Ã • U i ‹ ÷ ¿ X Ä h   m h d È r   e Å Ã „ e o Š Ä   m Š d R d Ã …   • £ h Ç

… " d Ä   • U Â   m ± €   € È h S T È › Š „ d C · • ½ „ € S T d • o h d „ È “ n P „ È “ n À T d   • ~ … ÷ s ½ À

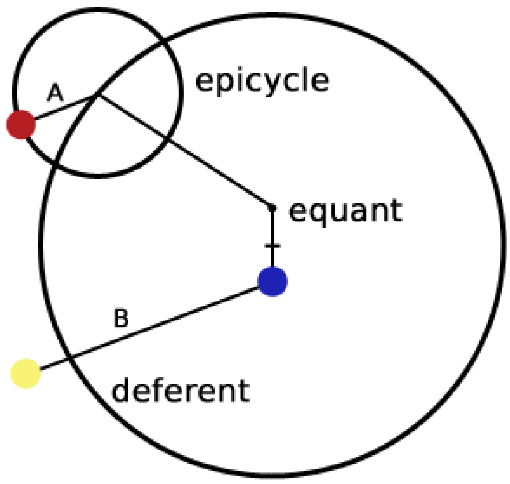
¼ T • ± % À U ¾ w Â ½   m h e r C m ¢ … Š e h m Š d Ã … T d € À U ½ † C „ Ç € Ä h s Á e ¾ Š X . » e ‹ v

d „ · • ½ P Ä T „ • Â ‹ Š d % ¸ Å d P ˆ È U ¾ º › h . » e Á Ä h R ¼ w Â ½   • Å • h y U – È n d „ Ã e ½ Ç e Å

Ç „ Ã „ e U Š   € …   x ® ’ d È { Á À T d Ä h d „ e Å „ d • ½ Ç P € …   Ä v È n e Å Ã „ e U Š C „ d • ½ Ä h ™

¸ ½ e z C ˆ º - Ä h » È Š È ½ R d Ã … T d € R Ç „ Œ € È ~ Ä   m Š d R d Ä › ² Á Ã … T d € À T d C ‡ … ½

Ò



°i›Â½ ÀU½† …h e²U±€ ¸U½/e2 7 C ˆº- ½„ ‡m ŠdÃ… Td€ mŠd ÑU¾Ž† ShX CR Ä›

…U‹¾¹d ·•£½ Äh d„ ÀU½† Ä mŠd s›~ Ã„eë ™ŠÇ Ä›²Á ÀTd Ã•Ž ‘••½ s²-d ™~

Cˆº- C‡ …½ Äh d„ …U‹¾¹d ·•£½ Ä Cˆº CR Ä›Á Ã„eUŠ[m ÂMs½ ¸'Ç

•Â s½ ¸'Ç Ã„eUŠ Äh d„ Cˆº- C‡ …½ Ä R „d€…h •~…÷ s½ mher CR Rd ÄTC

•Â s½ ¸'Ç •UŽ„È~ Äh d„ ÀU½† Ä •Žeh R „d€…h CR R†dÈ

C R Ä{®’ d„ Ã„eUŠ C„d•½ ¼UÂ ¿eUh †Ç…½d ClеU–eT„ C¿eh† Äh d„ ÀTd •Td

ÀTd eh Ã„eUŠ C„È{½ •Ž Ç„ Ã„eUŠ …®’ C R ÄŸ{¹ „€ ¼UÂ ”… (x; y) mŠd le“o•½ Wd

€ÈŽ s½ Ã€d€ eÅ Ä¹€e£½

$$x(t) = a\cos(!t) + b\cos(\ t) \qquad 3$$

$$y(t) = a\sin(!t) + b\sin(\ t) \qquad 4$$

a P·Èš en Ç€ €ÈŽ s½ ‘••½ s²U²z C…o½d„eë ÀC€P÷¸½h m C¸ºe v€ŠdŽ…€ TÇ•n Cˆº-

R „d€…h C R eoŠd„ ™²- ¿È÷ Ä mŠd ÀTd ¼UÂ‹ hÇÄr R d ÄX Çd† C e m Ç Ä. Š R e g¹ Ç€ ÇR

…UU§n eoŠd„ ÀTd Ä ¿X Sh P€.b Ç ..¿–dRnÃ s¹½•P m Š d¢¼.Æ½¿€ d„s½ ¸’Ç Ã„eUŠ Äh

•Ád •£Çh Sh ¼Å ÄŠ …Å Ä P€„d€ s²U²z … a½bd m„e‹Á Ä™Š²™²gU®¾ Â Tdk ½h s Â•£T

¬U’Èn R fÈ~ >eoi‹Á È{Á Äh d„ Ãe½ Ç eÅ Ã„eUŠ C„d•½ PÃ„eUŠ …Å CR d…h e

•Á…UŽh …ŸÁ „€ ÀU½† C‡ …½ †d …U¦ Rd Ä›²Á d„ ¸½ez Cˆº- C‡ …½

s‹UÁ…ëÈ Cf®²Ád Ò

ÀTd „€ msÁe¾ŠX .»e‹vd %Œ€…" CR Ã„eh „€n .»eÁ Äh •Ž …•oÂ½ Çd †d R fe

P…Un ¿eÆv C‡ …½ „€ mŠd Rd Ã… •UŽ„È~ P·•½ ÀTd %ˆeŠd …h €Èh Ã€… €

Rd Ã… Ãe½ •Á€…" s½ •UŽ„È~ C„Ç€ Äh ST eÅ„d•½ …h gUn…n ÀU¾Å Äh Ä •Â

ˆUÁ…ëÈ C·-•oŠd Ä ÀTd •Á„d•Á m …z •UŽ„È~ Äh mi‹Á sÂ£T P•Ád mher R »e

e®o d Äo Á •Â÷ C… , Äh ™²- s‹UÁ…ëÈ C·•½ C€„È½ „€ ¼TÈ•h ¿X C€„dÇ ¼U

¼UÂ s½

gU …n sÁe¾ŠX .»e‹vd Cm …z ¼Å †ÈÂÅ mŠd …TÇ•n Cˆº- Ç ¸½ez Cˆº- †d R gU

mŠd Rd Ã…Td€ CR eÅ m …z †d R

•Ád ÀU½† %¸s½ •Çh- ¼Å …ŽT€ CR eÅ Ã„eUŠ ÷P…ŽT€ C¿eUh

Ã„dÈ¾Å •UÅeÁ Ç …Un Ä Ps½ÈwÁ CmU£±dÇ ÀTd •Â s½ s-…£½ s½ÈwÁ C•zd

R •e~ CR eÆÁe½† „€ Ä •Á„d€ •UŽ„È~ †d Rd ÄTÇd† CR Äº'e- ÀT…o•Uh ˆT »d•

†d •UÅeÁ Ç …Un CR Äº'e- ÄTÇd† ÀTd %•wÂŠ Äh ˆUÁ…ëÈ Ç P€„d€ Ã€eŠ „eU

€„ÇX mŠ€ Äh d„ •UŽ„È~

$$R = \sin \quad AU: \qquad (5)$$

€„d€ Rd Ã€eŠ C…Ui£n s‹UÁ…ëÈ C·•½ „€ P¿e¾÷ŠX „€ ¿dÈU Ç R

$$x_1 = \cos t \qquad y_1 = \sin t \qquad (6)$$

$$x_2 = 1{:}5\cos(05t) \qquad y_2 = 1{:}5\sin(0{:}5t) \qquad (7)$$

$$\tan \quad = \frac{1{:}5\sin(0{:}5t) \quad \sin t}{1{:}5\cos(05t) \quad \cos t} \qquad (8)$$

ÄºU¹e" Ó

P•ÂoŽd€ ¼Å SiÅƒ½ Ç sŠeUŠ C„eio¢d Ä PSTÈ›Š„d CˆT‡U- C¿d„d•-…š €…

CˆT‡U- eh •UŽ„È~ C„Ç€ Äh Ç Œ€€È~ C„Ç€ Äh ÀU½† Cm …z Ä €Èh ÀTd sŠÈU

¿eUTÈ›Š„d C·-•oŠd Äh mÆv •Â÷ †d ÄºU¹e" ¼TÈŽ s¾Á m …z ÀTd ÄvÈo½ d…

€d€ •Šeë

Rd Ä¹Èº" €Èh ÀTd ·-•oŠd CR ÃÈ{Á €„d•Á …{½ Äh †eUÁ sº²U' CR s²-d .€›Š

Ç„ R €eT† >eoi‹Á Cm-e‹½ Ä¹Èº" m‹Å sº²U' CR s²-d .€›Š ˆT „d•iUŽ .€›Š CReÆ

m-…" ÄwUoÁ ÄºU¹e" €Ç„ s½ R …o•Uh Cm-e‹½ Ä¹Èº" P¼UÂ sº²U' …o•Uh d„

¸h PmŠd Ç…UÁ sÂ£T …{½ C•Â½†eUÁ Ä m‹UÁ m …z ‰ë €… ¼ ¿dÈn s½ d

€ÈŽ s½ m …z C¿•Ž •Â Cq¢eh ev ÀTd „€ Ç…UÁ R

%¸~d€ „€ P•Žeh m …z C·ez „€ mher Cm¢…Š eh P»d„X CR eT„€ CR Ç„ Rdso•

eT ˆÈhÈnd e½ CR d…h •ÂÅ€ s½ RÇ„ À eŠ CR so• ˆT „€ Ä •ÂÅ€ s½ RÇ„ R „È

s²-d CR Ã€ev CR Ç„ mher Cm¢…Š eh Ä Pm …z C·ez „€ %ˆÈhÈnd ˆT „€ …"d

PsÂ£T •o-d s½ ¼be± ™~ ˆT C€d•o½d „€ !ÂŠ P•UÂ ·Ç ¿en C mŠ€ †dd„ R !Â

ÄvÇ öUÅ Äh STÈ›Š„d CˆT‡U- Ä mŠd R ‡U÷ ÀTd €Èh À eŠ ˆÈhÈnd …"d Ä •o-

•Â ÄUvÈnd„ ¿X •ÁdÈn s¾

P°º›½ CR e—- ˆT Ç m‹Å °º›½ C¿e½† ˆT ¼UÂ ¸U¾ n ¼UÁd€ s½ Ã†Ç…½d Ä ST

sÂ£T …{½ C•Â½†eUÁ PSTÈ›Š„d CˆT‡U- C•T€ †d P°º›½ CR e—- Äh mi‹Á m …

¼T†d€…ë s½ °º›½ CR e—- .»ÈÆ®½ Äh ev ÀTd „€ €… ¼UÅdÈ~ mi{

CR eÅ• ™~ eh Ä Rd s¹Èš ™hdÇ„ sÂ£T mŠd sŠ•Uº±d CR ÄŠ•ÂÅ ¿e¾Å e—-

ÄŠ•ÂÅ CR so•ÆÁ ¼Å ¿e¾Å Ä m‹Å so•ÆÁ ¼Å CR Ä›hd„ ˆT e—- ÀTd „€ €… °U

¼UÁ‡h ·es½ ˆT mŠd fÈ~ ¼UÂ „€ …oÆhd„ e—- ÀTd Ä ¿X

R !ÂŠ Ç mŠd À eŠ ¿X Äh mi‹Á Ã€eo‹Td ˆÈhÈnd „€ R ‘•Ž mŠd m …z C·ez „€ s

Vm‹U÷ Ã€eo‹Td Ã€ev C„eÂ Ä R ‰ C•T€ †d !ÂŠ C…U‹½ mŠd ¼be± CmŠd„

Cm¢…Š eh €„d€ Shen…ë Cm …z ˆT Ã€ev C„eÂ C…žeÁ Äh mi‹Á P!ÂŠ „±dÇ „€

!ÂŠ C…U‹½ ˜e²Á †d Ä¢È¾w½ ˆT Ä €ÈŽ s½ …Ž½ •Š…ë s½ mŠd •²o£½ STÈ›Š

•ÂŠ…ë s½ „Èš ÀTd R ¿e‹ ÀUÂ÷ æ-È¾£½ V•Ád m•ÆÁ ¼Å s¾ÆŠ Ç mŠd„ ™~

Vs¾ÆŠ eT €ÈŽ s½ mŠd„ ™~ Ã…~-eh P¼UÂ ¸'Ç ¼Å Äh d„ ˜e²Á †d Ä¹eiÁ€ ÀT

À eŠ C…žeÁ C•T€ †d PmŠd mŠd„ ™~ ˆT ˆÈhÈnd „€ À eŠ C…žeÁ C•T€ †d ¼‹v

ˆT …ŽT€ -ez ¼T„d•Á €e²o¢d STÈ›Š„d °º›½ R e—- Äh …ŽT€ ÄºU¹e" †d ‰ë Ä

¼T„d€ sÂnÈUÁ eT Rd ÄºU¹e" (

Rd ÄºU¹e" C¿e½†e—-

sÂ£T €d•TÇ„ €d•TÇ„ .»eÁ Äh m‹Å R »ÈÆ®½ e½ Cq{h „€ Ä›²Á C…žeÂo½ mŠd
„€ mŠd €d•TÇ„ ˆT •Á„È•h ¼Å Äh …"d !ÂŠ en Ç€ ®s½ •Å€ s½ R Ç„ •e~ CR ÄŸ{¹
en Ç€ …"d ®s½ ·es½ ÀTd CR Rd Ä›²Á C•z Äh m-„ •Teh PÄoi¹d •Ád Ã€„È~ ¼Å
‰ë …o‹÷È .¼‹v R €eT† „eU‹h C€d•£n †d Ã•Ž ¸U‹•n ÀUŽe½ …Å Ä mŠd €–dÇ
…o½ÈºU •Â÷ C·Èš Äh Ã€ev ˆT C·Èš %ˆeU²½ „€ …"d Äoi¹d €d•TÇ„ R €eT† C€
mŠd €d•TÇ„ ˆT >e£±dÇ ¼Å eh Ç„€È~ Ç€ €„È~…h
m‹U÷ ¿e½† ¼UÂUih €ÈŽ s½ '••½ ¿X C¿€d€ RÇ„ C¿e½† eh PÃ€d€
Äºc‹½ …ŽT€ CId…UU§n Ç P¿d„ÈÁev C•Ž„ P¿eÅeU" C!Á„ C…UU§n en PÄo-…
…Å ¼T†eŠ s½ m¢eŠ e½ „e ÀTd CR d…h ¼UÂ sÂUh •Uë ¼UÁdÈoh Ä R „Èš
Ã•ÂÂ '••½ e½ CR d…h Äh…²¢ .„–È½ eT m¹ez •Â s½m …z Ä Äh…²¢ €„d€ R
•UÂ mD±€ •Á„d€ „d…± R •e~ CmU£–Ç „€ m¢eŠ CR eÅ Äh…²¢ sÂ£T PmŠd m®
mŠd „‡h Cm¢eŠ ˆT CR Äh…²¢ %¸s½ „±dÇ „€ ¼Å ÀU
¿X fdÈv V¼T…UŽh swÂŠ ¿e½† .„v…½ d„ m¢eŠ »d• mŽd€ •ÂÅdÈ~ «®o~d ¼
C¿e‹Ád ˆT %•iÁ P·Çd Cm¢eŠ •T…UŽh …ŸÁ „€ d„ m¢eŠ Ç€ ÀTd ·es½ •ÁÈŽ
C„Ç€ Äh ÀU½† %•~…÷ „Ç€ …Å ÀU½† CR Ã… P»Ç€ Cm¢eŠ ¿€…¾Ž Äh ¼UÂ
…oÆh Œ mº¢ C¿•T€ CR d…h Vd…÷ •ÁÈŽ …n Ã€eŠ ˆT‡U- %ÀUÁdÈ± €ÈŽ s½ q
Äh •e~ C¿e¾o~eŠ ˆT CR -eh †d P€ÈŽ s½ eÅ„ ¿È‹Š †d Ä !ÂŠ ˆT Ä •• s½ ·Èš „•±
.„±È½ „€ '•Ž ¿X Ä mŽd€ •ÅdÈ~ s"Äo‹h ÀTd Äh P¼UwÂ‹h •e~ %'•Ž ¿X %•iÁ sÂ
fdÈ~ •Te½†X .»e#ÂÅ „€ …"d €Èh •ÅdÈ~ …o"„‡h €•¢ ÀTd P•Žeh Ã€… Œ†„Ç •
¿X CˆT È¹ÈT‡U- CmÈU£–Ç •Teh P¼UÂ ¸z d„ !ÂŠ ˆT C¿€eo-d CR Äºc‹½ Ä ¿X
€Èh •ÅdÈ•Á ÀUÂ÷ ¼T…UŽh …ŸÁ „€ m¢eŠ C¿dÈÂ¢ Äh d„ ÀU½† …"d e½
¬T…£n d„ €„d•ÁeoŠd Cm¢eŠ ÀU½† %•~…÷ sÂ£T P€Èh ÄUÁer C¬T…£n R eÂ
CR s£–Ç Cm …z C•ÂÁdÈn s½ Ä ST eÅ ·®o~d d…T† P€„d•ÁeoŠd Cm¢eŠ •Ž •U

$$X = 2x \quad y \qquad (9)$$

$$Y = x + y: \qquad (10)$$

$$x = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}Y \qquad (11)$$

$$y = \quad \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y: \qquad (12)$$

$(X = 1, Y = 0)$

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta \qquad (13)$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta \qquad (14)$$

$$x = r\cos\phi; \qquad y = r\sin\phi \qquad (15)$$

$$x' = r\cos(\phi+\theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \qquad (16)$$

$$y' = r\sin(\phi+\theta) = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \qquad (17)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (18)$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases} \qquad (19)$$

m Š dC R Ã †z dC Á„ È { ½ C „ Ç € Ä h ¿ d „ Ç € % ‰ T … n e ½ P …

$$R(z;\ ) = \begin{pmatrix} \cos & \sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

• Á d À Ç Â C R e Å „ È { ½ C „ Ç € Ä h P ¿ d „ Ç € C R e Å ‰ T … n e ½ Ä •

$$R(x;\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & \sin \\ 0 & \sin & \cos \end{pmatrix} \qquad (21)$$

$$R(y;\ ) = \begin{pmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin & 0 & \cos \end{pmatrix} \qquad (22)$$

¼ m ' … - À T d „ € Ä Á e ® Š e o ½ ¼ U Â s ½ m Š … Æ - e v À T d „ € Ä R € „ d € ¼ Æ ½ C R s " …

m ‹ U Á e Æ Â T d C l e i r d C R Ä b d „ …

$$RR^T = RR^T = I \qquad (23)$$

" È ¢ e h Ä R ‰ T … n e ½ s Â £ T P ‰ T … n e ½ ˆ T C R Ã € e Æ Á d … n Ä ¼ U Â s ½ R „ Ç X € e T …

® s ½ • T X s ½ m Š € Ä h e Å ¿ È o Š Ç e Å … › …

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \qquad (24)$$

$$\begin{pmatrix} \cos & \sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos & \sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(z;\ ) \qquad (25)$$

· e s ½ 1 m Š d „ È ¾ Å ¿ d „ Ç € % ‰ T … n e ½ C ¿ e

$$\det R(z; \ ) = \begin{vmatrix} \cos & \sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2 + \sin^2 = 1 \qquad (26)$$

R „ Ç X € e T

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad \quad bc \qquad (27)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \quad b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \qquad (28)$$

$$= aei + bfg + cdh \quad ceg \quad bdi \quad afh \qquad (29)$$

Ä T Ç d † … T † C · È ½ + 2 T € h „ ¿ • Â Ä È " Ä s ½ s º ' d C … › ± C … ' e Â ¢ . È ¾ w ½ Ä m Š d À T d ¿ d „

• Å € s ½ d „ ¿ d „ Ç € C R

$$\mathrm{tr}\, R = 1 + 2\cos \qquad (30)$$

• T … U Ž h … Ÿ Á „ € d „ … T † % ‰ T …

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

Ä • U Â m D 120 € C m R Š d † (1; 1; 1) Ä h È { ½ C „ Ç € Ä h ¿ d „ Ç € ‰ T … n e

$$\mathrm{tr}\, R = 0 = 1 + 2\cos 120 \qquad (32)$$

C ¿ d „ Ç € m Š d … ® ' C ¿ d „ Ç € ‡ v Ä h R ¿ d „ Ç € … Å „ È Ÿ Â ½ Ä o i ¹ d € È Ž s ¾ Á " È ¢ ¿ d • T e h P ¼ U h e U h d „ ¿ d „ Ç € C „ È { ½ Ä ¿ X C R d … h P „ ± d Ç „ € • Â s ¾ Á … U U § n R • Á È Ž s ¾ Á " È ¢ ‰ T … n e ½ C · e ¾ ¢ d C … r d … h Ä

l e “ o • ½ C R e Å „ È { ½ C ¿ d „ Ç €

• U Â Ä v È n … T † C R e Å · È ½ … - Ä

$$\begin{cases} x' = x\cos + y\sin \\ y' = x\sin + y\cos \\ z' = z \end{cases} \qquad (33)$$

(x', y', z') C R e Å Ä $(x; y; z)$ C R e Å Ä “ o • ½ † d P s n „ e € C R e Å Ä “ o • ½ C … U U § n ˆ T C ¬ T … £

C „ È { ½ $(x; y; z)$ € Ä R e Å „ È { ½ (x', y', z') Ç € R e Å „ È { ½ Ä • T € ¿ d È n s ½ s " Ã € e Š Ä h P l „ È ' À T d

(x', y', z') Ç • Á d m h e r e Å „ È { ½ 19 m D e Æ ¹ È ½ … - e h e Æ ¹ È ½ … - À C R Ã † d • Á d h Ä h • Â T X s

„ € s º i ± C R Ä › ² Á ¿ e (x', y', z') Ç R e Å • Á d Ã ½ U ~ 33 . „ € e ½ È { ½ Á d Ä o - e T ¿ d „ Ç € C R Ä › ² Á C

m Š d • T • v C R e Å Ä “ o • ½

ˆ e £ Á d Ø

• T … U Ž h … Ÿ Á „ € d „ … T † % ¸

$$(x; y; z) \mapsto (x; y; -z) \qquad (34)$$

Ç „ ˜ e ² Á Ä • U Â $z = 0$ C R € Ä { ® ' „ € Ä R d Ä Â T X „ € ˆ e £ Á d ‡ v m ‹ U Á R ‡

‰ £ Â ½ $(0; 0; z)$ ‰ € ‹ Ž Ä h R ˜ e € Á È { ½ C R Ç „ ˜ e ² Á $(x; y; 0)$ • Â ‹ Ž s ¼ Á R ˜ e ² Á s n Â £ T P Ä Â T X

m Š d À T d ¯ È - % ¸ T • i n % ‰ T … n e ½ Ä m Š d € – d Ç • Á È Ž s ½ ¸

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (35)$$

Ä o Ž d € d „ m U ' e ~ Ç € À T d Ä det R ‰ T 1 … Ã Ç ® ¢ R Ä Å ç m Š d Â £ T Ä P m Š d • ½ e £ o ½ ‰ T … n e

® s ½ m Š d Ä { ® ' ˆ T Ä h m i ‹ Á ˆ e £ Á d C R Ã • Â Â

$$I(\ ) = \begin{pmatrix} \sin & \cos & 0 \\ \cos & \sin & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 36$$

m Š d … T † C R Ä { ® I (Ã) • Â T X C R Ä { ® ' Ä • U Å • h ¿ e • Á À T … ¾

$$(x; y; z) \mid \frac{x}{y} = \frac{\cos}{1+\sin} \qquad 37$$

¼ U Â Ä È v È n Ã € e Š C · e s ½ Ç € Ä h d • o

$$I(\frac{}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 38$$

m Š d x = 0 C R Ä { ® ' „ € ˆ e £ Á d x È – Ç Ä h Ä

$$I(\ ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 39$$

m Š d … T † C R Ä { ® ' ˆ e £ Á d C R Ä { ® ' Ä € È Ž s ½ Ã

$$f(x; y; z) \mid x = \ y g \qquad 40$$

$RR^T = I$	$\det R 1$	¿ d „ Ç €	41
$RR^T = I$	$\det R\ \ 1$	ˆ e £ Á d	42

®s½ mŠd ¿d„Ç€ ˆT ˆe £Ád tÇ† C€d•£n eT

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

€„d•Á s"Äo‹h ¼Å gUn…n Äh y = 0 ÇR€ Ä{®' „€ g I_2 eÇ€Ád mŠd Ä{®' „€ I_1 e £Ád

€ÈŽ s½

$$I_1 I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(z; \ ) \tag{44}$$

mŠd 180 CR Ã†z d€Á„È{½ C„Ç€ Äh ¿d„Ç€ Ä

C…Š d„Äo Á ÀTd mŠd ¿d„Ç€ C„È{½ …h €È¾¢ CR Ä{®' Äh mi‹Á ˆe £Ád ˆT Ç ¿

R •½e£o½ %¸T•in …Å Ä €… mher ¿dÈn s½ »…‹•o½ Çd †d €… R„ÇX€eT ¿

•UÂ m±€ …T† CR ÄiŠe{½ Äh d•ohd gº›½ ÀTd %ÀT•T€ CR d…h Ä{®' Ä

$$\begin{pmatrix} \sin & \cos \\ \cos & \sin \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin & \cos \\ \cos & \sin \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \cos + \sin\ \sin & \sin\ \cos + \cos\ \sin \\ \sin\ \cos \quad \cos\ \sin & \cos\ \cos + \sin\ \sin \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\quad) & \sin(\quad) \\ \sin(\quad) & \cos(\quad) \end{pmatrix} \tag{46}$$

ÂTd m‹UÁ eo‹T ÀoŽÈÁ ÀTd Äoi¹d Ç PmŽÈÁ z C„È{½ Ç€ Ç gUd„Ç€ CÅ€Ès¼Äh ¿d•Á

CIeUb‡v mŽÈÁ ˆe £Ád en ÄŠ gU …n CI„È' Äh d„¿X ¿dÈn s½ Ä mŠd €–dÇ P½

e¾Ž eh leird

$$A = \begin{pmatrix} \cos & \sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

tÈ½ Ù

P·Çd ¼UÂ s½ Ç…Žd„sŠ„…h ·es½ •Â÷eh mŠd tÈ½ . È–È½ P¼T„d€ »†- mÈ
¸o•½ d„ …•oŠd R ‡U÷Ç €†ÈÁ €eh •Žeh À eŠ …•oŠd CR -eh CR dÈÅ …"d •T
¿X „€ ST eÅ tÈ½ P¼UÂ ¸o•½ d„ fX .€›Š !ÂŠ ˆT %Ào~d•Ád eh ®s½ …"d ·ez •
R m¢…Š m …z ÀTd •Â s½ m …z Ä mŠd ¿€Èh s²-d †d fX .€›Š C«d…{Ád ˆT „±
…"d •T…UŽh …ŸÁ „€ d„ Ä›²Á Ç€ %ÀUh Ã•U• C¿e¾‹T„ ˆT ®s½ eT …•oŠd %
m …z mŠd„ Ç ê÷Äh ¸‹Ž C…UU§n ÀTd Ç P•Å€ s½ ¸‹Ž C…UU§n ¿e¾‹T„ †d R ••
ST ev „€ d„ dÈÅ C„e•- „±dÇ „€ P¼T„ÇX s½ „€ d•' Rd ÄºUŠÇ eh R m±Ç mŠd lÈ'
„€ „e•- C…UU§n C„e•oÁd „±dÇ „€ lÈ' €ÈŽ s½ …•oÂ½ mÆv Ä¾Å „€ „e•- C…UU
mŠd dÈÅ

Ä£¹e›½ Ä m‹Å tÈ½ ÈÁ Ç€ e½d P•Á„d€ R €eT† „eU‹h . dÈÁd •ÁÈŽ s½ …•oÂ½
RÇ… .tdÈ½d Ç Pm•n .tdÈ½d mŠd …n ¼Æ½

m•n .tÈ½ Ñ Ù

%¸‹Ž Äh R¡hen sÂ£T m•n .»e® n

$$f(x;y;z;t) = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \qquad (48)$$

mŠd R k„d€ P.€n„d€ »eÁ Rd ÄTÇd†! C P•¼Šdh Ä½Š d R ‹ ¿e¾‹T„ (x;y;z) …h ÀTd „€ Ä
€„d€ »eÁ tÈ½ R ÄÂ½d€ Ä„d€ mŠd R tÈ½ C„d€…h Ä
¼T„d€ m±Ç Ç X m•Ž„€h Ä‹Tk = kz ¼.UhŽeh ÄoŽd€ …"d ·es½

$$f(x;y;z;t) = A\cos(kz - \omega t) \qquad (49)$$

€–dÇ ¼Å ÀTd •Â != (2) ¿€ŠŽÁ Chm È U¾ m•Td m.h eÄ e—- †d Ä›²Á …Å „€ Ä mŠd
= k=(2) Ä P m(x;y;z +) CmÈU£–Ç (x;y;z) s½ Ä e²Á m€U£+Ç ÂmT eÄ R{¹ …Å „€ Ä mŠd
€„d€ »eÁ tÈ½ C·Èš

C m È U ¾ Ä h

$$= k r \quad ! t \tag{50}$$

C m ¢ … Š e h Ä € È ¾ ¢ P m Š d R C R Ä { ® ¢ È ¾ w ½ ¼ U T È " s ½ t È ½

$$c = \frac{!}{k} \tag{51}$$

Ä m Š d € – d Ç P ¼ U o ® " … n - e h Ä R • e ~ C m ¹ e z C € „ È ½

$$= kz \quad !t = k \; z \quad \frac{!}{k} t \quad = k(z \quad ct) \tag{52}$$

e h (x; y) C R Ä { ® ' C R R † d È ½ P z = d c Ä { ® U Ž s Â £ T Ä Ž d € • T e h ¿ X • Ž e h d m h e r Ä m Š d € – d Ç

• Â s ½ m … z C m Š ¢ „ Ä h

m Š d m h e r m • n . t È ½ C R Ä Â ½ d €

m • n C R e Å Ä { ® ' e Å t È ½ À T d C R Ä Æ i v • Â T X s ½ € È v Ç Ä h R d Ã … T d € S T e Å t È ½

Ä U i Ž R ‡ U ÷ U € È Ž s ½ ˆ ÷ È e Å Ã … T d € . e £ Ž C ¿ • Ž „ ‡ h e h ¼ Å e Æ Á X

$$F(\; ; '; z; t \;) = \frac{A}{p \; \underline{\;\;}} \cos(k \quad !t) \tag{53}$$

• Á d Ã • Á È Ž „ ‡ h S T e Å Ã … T d € m h e r † e - . x È

$$k \quad !t = \;_0 \qquad = ct + \frac{0}{k} \tag{54}$$

Ä U i Ž R ‡ U ÷ U € È Ž s ½ … • o Â ½ R Ç … . t È ½ ˆ T C l „ È ' Ä h d • ' À T d P ¼ U Â • U ¹ È n d

$$f(r; \; '; t \;) = \frac{A}{r} \cos(kr \quad !t) \tag{55}$$

Ä º ' e - % ‰ ¢ Ä h g Š e Â o ½ Ã • Ž f … – R È Â U ‹ „ € Ä ÷ ¿ X s Â £ T Ä Â ½ d € • Á d Ã • Á È Ž

m Š d

t È ½ ˜ Ç … • ½ Ò Ù

C R Ä ¹ € e £ ½

$$x^2 + y^2 \quad z^2 \tan^2 \quad = 0 \tag{56}$$

‡v m‹UÁ R ‡U÷ ¸‹Ž ÀTd… P•Ž eh•UÂ mD±€ mŠd „d7Ç€ ˜Ç…•½ ˆT€Ä mŠd mher

$(x;y)$ CR Ä{®' €ÈŽ s½ »eÆhd .„-„ ±90‰ ë."Ä¹€, È{½ ÀTd P•Že

ÄÆiv Ã€eo-d eÅ Ä"to=0½„ €d•Á½ Ž€s½Â ŠU¹Èn Rd Ã…Td€ R tdȽd ¼T†d•Ád s½

CR Ä¹€e£½ sÂ£TC m€Ž.Š½eh„Ah mŠd Rd Ã…Td€ Ã•Ž mŠ„

$$x^2 + y^2 = c^2 t^2 \tag{57}$$

¼UTÈ" s½ tȽ ˜Ç…•½ P˜Ç… (t;x;y) TdR Äh—mŠd s˜Ç£T•½ ˆT¿e½†e—-„€ Ä¹

Ã€d€ RÇ„ eÅ Ä"t=0½„ €d•w®Ád …"dc €mŽ s½Š eh•RǽR tȽ PdÈÅ „€ „ew®Ád

CR Ä¹€e£½ eh tȽ ÀTd CR ÄÆi

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{58}$$

mŠd R•£h„eÆ÷ C¿e½†e—-„€ R•£h ÄŠ ˜Ç…•½ ˆT Ä¹

R•²Á öUÅ Äºc‹½ ÀTd „€ ÀU½† CR Äh,ev •Âv s½ m…ŠehŠd„e¾UëdȀdÄºc‹

m…czC m¢…Š eh €ÈŽ s½ "…-À eŠÄ dÈÅ „€ PÕŽ •U¹Èn ClÈ' €ÈŽ s½ lÈ' C

CR ÄÆi$_0$v CR ÄŸ{¹ „€ P×ÂC„m{.½zC€d•o½d „€ Ç$_0$ P•ŽeR Ã€{¹h„€d¾Uë„dÈÅ …"d •Â

Cm¹ez „€ •U>Âc Ç{<hc CR eÅ m¹ez CR d…h VmŠd R ¸‹Ž Ä÷ Äh e¾UëdÈÅ C„Ènȹ

V•o-d s½ Rv¯=e®nd Ä÷

s‹oÁ…¹ ‡U~ ÑÚ

mŠd „ÈÁc C.mT¢.„€Š

$$c := 299{,}792{,}458 \, \mathrm{m\,s}^{-1} \tag{59}$$

¼UÂ s½ ¬T…£n P•Ž eh "h e r Cm¢…Š

$$\beta := \frac{v}{c} \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{60}$$

¼T…UŽh …ŸÁ „€ d„ …T† %

$$t^0 = \quad t \quad \frac{v}{c^2}\,x \quad ; \qquad 61$$

$$x^0 = \quad (x \quad v\,t)\,; \qquad 62$$

$$y^0 = y; \qquad 63$$

$$z^0 = z: \qquad 64$$

P¼Å€†ÈÁ ¿…± …~dÇd PR•ÂºÅ R Ä•Uë ˆT‡U- P‰oÁ… B¹ ¿ÈoÁX ˆT„•ÂÅ „e•o-d

¼UÂ s½ sŠ„…h …T† „€ Ä €„d€ ST eÅ s"Ã TÇ ¸T•in ÀT

€„d€jsjÂ€£½R d…h ™²- ¸÷T•in ÀTd

Rd ÄºU¹e" ‡U~ €ÈŽ sR ¸÷T•in ÀTd

mŠd ÀUÂ÷ ¸T•in ÀTd C¿Ç„dÇ

$$t = \quad t^0 + \frac{v}{c^2}\,x^0 \quad ; \qquad 65$$

$$x = \quad (x^0 + v\,t^0)\,; \qquad 66$$

$$y = y^0; \qquad 67$$

$$z = z^0: \qquad 68$$

¿€… ¸z eh ¿dÈn s½ dy ÄTwdÇ„½PU¼UÂ ¸T•Èn€ d„ ¼T…ë Sh Ç „d€ ¼T…ë R eÅ…U§o½

€d€ ¿e•Á eÅ Ä¹€e£½

mŠd Rd ÄºU¹e" C!‡U~ CP•%oÁ…¹ C‡U~

m Š d À U Â ÷ Ç • T X s ½ m Š € Ä h R … U " ° K • ½ K e n fe È Æ „ e ÷ … Ç € . ‰ ¾ À U n R ‰ Ã T ¢ e ± ‰ R • Ž e . h ¹

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \lim_{t\to 0} \frac{x}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\ \ x^0 + v\ \ t^0)}{(\ \ t^0 + c^{\ 2} v\ \ x^0)}$$

$$= \lim_{t^0\to 0} \frac{x^0 = \ \ t^0 + v}{1 + c^{\ 2} v\ \ x^0 = \ \ t^0}$$

$$= \frac{u^0_x + v}{1 + c^{\ 2} v u^0_x} \qquad 69$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u^0_y}{(1 + c^{\ 2} v u^0_x)} \qquad 70$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u^0_z}{(1 + c^{\ 2} v u^0_x)} \qquad 71$$

€ … m h e r d „ … T † € e { n d ¿ d È n s ½ e Æ ¹ È ½ .

$$1 \ \ \frac{u^2}{c^2} = \left(1 \ \ \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 \ \ \frac{u^{02}}{c^2}\right) \left(1 + \frac{u^0_x v}{c^2}\right)^{2} \qquad 72$$

¼ T „ d € Ä € È Ž s ½ » È º £ ½ m D ± (€ R v ½ c ² e R m Š d … o ½ È j d ¿ È ÷ d d

$$u^2 < c^2 \quad , \quad u^{02} < c^2 \qquad 73$$

$$u^2 = c^2 \quad , \quad u^{02} = c^2 \qquad 74$$

$$u^2 > c^2 \quad , \quad u^{02} > c^2 \qquad 75$$

C R Ä U ² h ¼ Â € „ d Ç Ã Ç ‡ v À T d „ € » d Ã € d € ˆ „ € ˆ ® „ € Ä d „ R g ¹ e › ½

• U Á d È • h » d Ã € … Ä U Æ n Ã e Ž • Á d € „ € ‰ T „ • n R d … h ® i ± Ä R …

shariati@mailaps.org

1.0

2006/ 04/ 07

I

A

1

2

3

I

4

5

Ž

Ž

Ž

6

30 C

20 C

I

1 m

7

R

R^2 R

R^3

8

8.a

I

9

86400 s

10

I

$10^{\text{Š}\,15}$ s

$10^{\text{Š}\,40}$ s $10^{\text{Š}\,30}$ s

R

11

1

3 2

12

13

v

• Ž

• Ž

Ž

I

14

O

O

E_2 E_1

B

15

z y x

16

17

18

19

L L

O O O L O L

20

10 $2\,m\,s^{-1}$

O O

O

(x, y, z) 2.5 s

O

L L

L L L

20

L L

L L 1

L L 2

L L 3

I

L L 4

L v

L L

L L

L L

21

(L L 22

L

L L L

23

24 . . . 2 . . . 1 . . . . . .

. . 1 . . . 2 . . . n . . v . .

. . 3 . . Š n . v . .

1 . . . 2 . . 2 . . .

. . 1 . . . 3 . . .

25

v + at . . . L . . .

a L w + at L

. . w Š v . . . L . . . L . .

L L L

26

27

I

28

(x,y) E

(a,b) R O R

$$= \{ (x,y) \in E \mid x^2 + y^2 = R^2 \},$$
$$= \{ (x,y) \in E \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \}.$$

(a,b)

T

$$T_{a,b}\ \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\} = \{(x+a, y+a) \mid f(x,y) = 0\}$$
$$= \{(X,Y) \mid f(X - a, Y - b) = 0\}.$$

$$T_{a,b}() = (x+a, y+b) \mid x^2 + y^2 = R^2$$
$$= (X,Y) \mid (X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2 = .$$

$[r, \ ]$

$$= \{ [r, \ ] \in E \mid r - R = 0 \},$$
$$= [r, \ ] \in E \mid r^2 - 2r(a\cos + b\sin) + a^2 + b^2 - R^2 = 0 .$$

K K … . Ž 29

O O … . Ž . •

• (t, x, y, z) (t, x, y, z)

I

L L Ž

. Ž • . .

• (t , x , y , z) (t, x, y, z) . E ...

. (t, x, y, z) . L

(t , x , y , z) . L

C

O K . K K

O K

K . K . K ... 30

K

$$t = t - t_0,$$
$$x = x - x_0,$$
$$y = y - y_0,$$
$$z = z - z_0.$$

t . . . O . z_0 y_0 x_0 t_0 .

K . $t - t_0$ . . . O .

(x, y, z) . . . O . . K . . . t_0 .

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ . . . O .

K . O .

(x_0, y_0, z_0) . . .

I

. . . . $(x = 0, y = 0, z = 0)$ . . . K . .

$(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$

K K 31

.. . x y z . . . .

xyz

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

x y z xyz . . . . $R \; R = I$ ... . R_{ij} . . .

+1 R

$$\begin{aligned} t &= t \\ x &= x \cos + y \sin \\ y &= - x \sin + y \cos \\ z &= z. \end{aligned}$$

. . $z = z$ . . x y . . . .

.. K . . . . K 32

K (v_x, v_y, v_z) K

$$\begin{aligned} t &= t, \\ x &= x - v_x t, \\ y &= y - v_y t, \\ z &= z - v_z t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= t, \\ x &= x + v_x t, \\ y &= y + v_y t, \end{aligned}$$

$$z' = z + v_z t.$$

$-v$. v

K K'

33

K' K

x' t' x t $z' = z$ $y' = y$ $(v, 0, 0)$

$$t' = t,$$
$$x' = x - vt.$$

(t', x') (t, x) 34

$x = vt$ t $x' = x - vt$ $x' = 0$ t

$t = 0$ x $t' = t$ $t' = 0$ x'

t t' x x'

t t' 35

K $z = 0$ $y = 0$ $x = 0$

K'

t'

t

O K' $z' = 0$ $y' = 0$ $x' = 0$

O' 36

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

O O'

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t').$$

$y(t)$ $x(t)$

O O $z(t)$

$$t = t$$

$$x(t) = x(t) - v_x t,$$
$$y(t) = y(t) - v_y t,$$
$$z(t) = z(t) - v_z t.$$

O

$$u(t) := (v_x, v_y, v_z) := (x, y, z).$$

$$u_x(t) = u_x(t) - v_x,$$
$$u_y(t) = u_y(t) - v_y,$$
$$u_z(t) = u_z(t) - v_z;$$

$$a_x(t) = u_x(t),$$
$$a_y(t) = u_y(t),$$
$$a_z(t) = u_z(t).$$

II

m

K v

$$E = \frac{1}{2}m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) .$$

K w K

K

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}m \left((v_x - w_x)^2 + (v_y - w_x)^2 + (v_x - w_x)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}m \left(v^2 - 2v \cdot w + w^2 \right) .
\end{aligned}$$

m

$E = E$ $w = 0$

38

39

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\mathrm{grad}^2 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\mathrm{grad}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

[1]

• Ž

A

40

P m

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t),$$

[1] $\sin(kx - \omega t)$ $\frac{\partial}{\partial x}$ $k\cos(kx - \omega t)$

$$m\ddot{y} = F_y(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t),$$
$$m\ddot{z} = F_z(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t).$$

$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$

P

P F

F

41

$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ i

j i

$$\mathbf{F}_{j \to i} = -GM_i M_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

i

$$\mathbf{F}_i = -GM_i \sum_{j \neq i} M_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

i

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j \neq i} M_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

N

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j \neq i} M_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

O . . . . O

$$\ddot{r}_i = -G \sum_{j \neq i} M_j \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|}, \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

B

. O 42

. . . O . . .

i

43

$$x^0 := t, \quad x^1 := x, \quad x^2 := y, \quad x^3 := z.$$

. t^2 … $(x^0)^2$ … μ … x^μ … $\{1, 2, 3\}$ … $\{0, 1, 2, 3\}$

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

$$\partial_0 := \partial_t := \frac{\partial}{\partial x^0} := \frac{\partial}{\partial t},$$

$$_1 := \ _x := \frac{}{x^1} := \frac{}{x},$$

$$_2 := \ _y := \frac{}{x^2} := \frac{}{y},$$

$$_3 := \ _z := \frac{}{x^3} := \frac{}{z}.$$

$$^2_0 := \frac{^2}{(x^0)^2} := \frac{^2}{t^2}.$$

$$\text{grad} := (\ _1, \ _2, \ _3),$$
$$:= (\ _0, \text{grad}),$$

grad^2

1 0

. .. . μ 44

. f (u, v) .. . . v(x, y) u(x, y) . . ..

$$g(x, y) := f(u(x, y), v(x, y)).$$

$$\frac{g}{x} = \frac{u}{x}\frac{f}{u} + \frac{v}{x}\frac{f}{v}$$

$$\frac{g}{y} = \frac{u}{y}\frac{f}{u} + \frac{v}{y}\frac{f}{v}.$$

$$\frac{}{x} = \frac{u}{x}\frac{}{u} + \frac{v}{x}\frac{}{v}$$

II

$$\frac{}{y} = \frac{u}{y}\frac{}{u} + \frac{v}{y}\frac{}{v},$$

$g(x, y)$

$f(u, v)$

x^{μ} x^{μ}

$$\begin{aligned} x^{0} &= x^{0}(x^0, x^1, x^2, x^3), \\ x^{1} &= x^{1}(x^0, x^1, x^2, x^3), \\ x^{2} &= x^{2}(x^0, x^1, x^2, x^3), \\ x^{3} &= x^{3}(x^0, x^1, x^2, x^3). \end{aligned}$$

$g(x) := f(x(x))$ x^{μ} f

$$\frac{g}{x^{\mu}} = \sum_{0}^{3} \frac{x}{x^{\mu}}\frac{f}{x}.$$

$$\frac{}{x^{\mu}} = \frac{x}{x^{\mu}}\frac{}{x}$$

$$_{\mu} = \frac{x}{x^{\mu}}$$

$g(x) := f(x(x))$

$f(x)$ x

x

45

$$J := \frac{(u, v)}{(x, y)} := \begin{vmatrix} \frac{u}{x} & \frac{u}{y} \\ \frac{v}{x} & \frac{v}{y} \end{vmatrix},$$

(x, y) $(u(x, y), v(x, y))$

II

$$J := \det \frac{x^{\mu}}{x} ,$$

ii

46

$$\begin{aligned} t &= t, \\ x &= x - v_x\, t, \\ y &= y - v_y\, t, \\ z &= z - v_z\, t, \end{aligned}$$

$$J = \det \frac{x^{\mu}}{x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 ,$$

(46.1)
$$\begin{aligned} {}_t &= {}_t - v_x\, {}_x - v_y\, {}_y - v_z\, {}_z = {}_t - v \cdot \mathrm{grad} , \\ {}_x &= {}_x , \\ {}_y &= {}_y , \\ {}_z &= {}_z . \end{aligned}$$

grad^2 grad^2

$$t = t$$ 47

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} ,$$

$$\frac{}{t} = \frac{}{t} + v \cdot \mathrm{grad} .$$

x $\frac{d}{dt}$

$\overline{\ \ }_t$ t

$\frac{d}{dt}$ $\frac{d}{dt}$

$\overline{\ \ }_t$ $\overline{\ \ }_t$ O O

z y x t

z y x t t

$y' = y - v_y t$ $x' = x - v_x t$ $t' = t$ t

z y x z y x $z' = x - v_z t$

iii

48

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

2 $\hbar$ m

$|\psi(x,y,z,t)|^2\, dx\, dy\, dz$

t (x,y,z) $dx \times dy \times dz$

49

K

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t'}.$$

(46.1

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\hbar v\cdot\nabla\psi.$$

II

. . . .
. ... . . 1 .. . .

e^{i}

(x , y , z , t) 50

$$(x, y, z, t) := (x, y, z, t) \quad f(x, y, z, t),$$

K K

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \quad {}^2 \quad = i\hbar \frac{}{t}.$$

$$f(x, t) := (x - wt, t),$$

K K w

III

I

A

51

$c \approx 3 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

I

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \operatorname{grad}^2 I = 0 . \tag{51.1}$$

K

K

K

K K

K

K K

K K

52

(51.1

53

$300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$= {}_0 +$ w

${}_0$ (t, x, y, z) ${}_0$

$$-\frac{1}{w^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathrm{grad}^2 = 0 . \qquad (53.1)$$

w

(53.1

54

$1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

(x_0, y_0) t_0 w

$t > t_0$

$w(t - t_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - w^2 (t - t_0)^2 = 0 .$$

I III

(t, x, y) 3 2

w

(x_0, y_0, z_0) t_0 K 55

t

$$c = 299,792,458 \, \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$t > t_0$

t $c(t - t_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0 .$$

(t, x, y, z) 4 3

3

c

X I B

K K 56

$$
\begin{aligned}
t &= \quad t + \frac{v}{c^2} x \quad , \\
x &= \quad x + v t \quad , \\
y &= y , \\
z &= z ,
\end{aligned}
\tag{56.1}
$$

$$c = 299,792,458 \, \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$(v) := \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad ^{-\frac{1}{2}} ,$$

t $x = y = z = 0$ K 57

K

$$t = t, \quad x = vt, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

K $x = vt$ t

v K

K x v K

z y x t z y x t 56.1 58

$$
\begin{aligned}
t &= t - \frac{v}{c^2}x, \\
x &= (x - vt), \\
y &= y, \\
z &= z,
\end{aligned}
\tag{58.1}
$$

K K

$(-v, 0, 0)$

C

$(0, 0, 0)$ $t_0 = 0$ K 59

K

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

K

c c K

I III

D

$z=0$ $y=0$ $x=0$ K

dt

$$t=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$$
$$t=dt,\ x=0,\ y=0,\ z=0$$

K

56.1 K

$$t=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0 \qquad K$$
$$t=dt,\ x=v\,dt,\ y=0,\ z=0 \qquad K$$

dt K

E

K 60

$x=A+x$ $z=C$ $y=B$ $x=A$

K $z=C+z$ $y=B+y$

$$L_0=\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}.$$

L_0 K

K

$(v,0,0)$ K

t

10 10

t

I III

$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

t K

$(v, 0, 0)$ K

$$x(t) = x_0 + vt, \quad y(t) = y_0, \quad z(t) = z_0,$$
$$x(t) = x_0 + \Delta x + vt, \quad y(t) = y_0 + \Delta y, \quad z(t) = z_0 + \Delta z.$$

K

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

z y x z y x

(58.1 (56.1

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \frac{v}{c^2}\Delta t\right)\Big|_{\Delta t=0} = \gamma\,\Delta x,$$
$$\Delta y' = \Delta y,$$
$$\Delta z' = \Delta z.$$

$$L := \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$
$$= \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}.$$

x

K

$$L_0 \cos\theta = \Delta x',$$
$$L_0 \sin\theta = \sqrt{(\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}.$$

$$L = L_0\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta + \sin^2\theta}\,.$$

I III

$= / 2$ 1/

$0 < \ < / 2$

K x

$$L \cos \ = \ x,$$
$$L \sin \ = \sqrt{(\ y)^2 + (\ z)^2}.$$

$$\tan \ = \frac{\sqrt{(\ y)^2 + (\ z)^2}}{x} = \frac{\sqrt{(\ y\ )^2 + (\ z\ )^2}}{\underline{x}}$$
$$= \ \tan \ .$$

1 (58.1 (56.1

2 1/

F

K 61

$$u = \frac{dx}{dt} = (u_x, u_y, u_z),$$

K

$$u = \frac{dx}{dt} = \ u_x, u_y, u_z \ .$$

I III

$$dt = \quad dt + v\,dx \quad ,$$
$$dx = \quad dx + v, dt \quad ,$$
$$dy = dy \,,$$
$$dz = dz \,.$$

dt dz dy dx

(61.1) $$u_x = \frac{u_x + v}{1 + vu_x}$$

(61.2) $$u_y = \frac{u_y}{(1 + vu_x)},$$

(61.3) $$u_z = \frac{u_z}{(1 + vu_x)}.$$

(61.4) $$u = \frac{u + v}{1 + u \cdot v},$$

(61.5) $$u = \frac{u}{(1 + u \cdot v)},$$

$$= \quad (v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

$$\begin{aligned} 1 - u \cdot v &= 1 - u \quad v \\ &= 1 - \frac{u \quad v + v^2}{1 + u \quad v} \\ &= \frac{1 - v^2}{1 + u \quad v}, \end{aligned}$$

$$(1 - u \cdot v)(1 + u \cdot v) = 1 - v^2.$$

u u 61.4 61.5

$$u = \frac{u \;Š\; v}{1 \;Š\; u \cdot v},$$
$$u = \frac{u}{(1 + u \cdot v)},$$

Šv v

v u u^2

$$u^2 = u^2 + u^2 \tag{61.6}$$

$$= 1 \;Š\; \frac{(1 \;Š\; v^2)(1 \;Š\; u^2)}{(1 + u \cdot v)^2} \tag{61.7}$$

$$u = \frac{\sqrt{(u \;Š\; v)^2 \;Š\; (u \times v)^2}}{1 \;Š\; u \cdot v}, \tag{61.8}$$

$$= \frac{\sqrt{(u \;Š\; v)^2 \;Š\; c^{Š2} (u \times v)^2}}{1 \;Š\; c^{Š2} u \cdot v}, \tag{61.9}$$

61.7

$$1 \;Š\; u^2 = \frac{(1 \;Š\; v^2)(1 \;Š\; u^2)}{(1 + u \cdot v)^2}, \tag{61.10}$$

$$(u) = (v)\;(u)\;\; 1 + u \cdot v \tag{61.11}$$

$u^2 = c^2$ $u^2 = c^2$ 62

u_2 u_1 . . . . . . 2 1 K . . . . … . 63

. . u_{21} . . . . 1 . . . . 2 . . . . … . .

. . . . u_1 . . . K_1 . . . . K_1 . . 2 . . . .

K

$$u_{21}^{\text{Galilean}} = u_2 \;Š\; u_1, \tag{63.1}$$

$$u_{21}^{\text{Galilean}} = \sqrt{(u_2 - u_2)^2}. \tag{63.2}$$

$$u_{21} = \frac{u_2 - u_1}{1 - u_1 \cdot u_2}, \tag{63.3}$$

$$u_{21} = \frac{u_2}{(u_1)(1 - u_1 \cdot u_2)}, \tag{63.4}$$

$$u_{21} = \frac{\sqrt{(u_2 - u_1)^2 - (u_1 \times u_2)^2}}{1 - u_1 \cdot u_2}, \tag{63.5}$$

$$= \frac{\sqrt{(u_2 - u_1)^2 - c^{-2}(u_1 \times u_2)^2}}{1 - c^{-2} u_1 \cdot u_2}. \tag{63.6}$$

. . . . . v K . .. . K 64

u v . . . K . .. . u K . .. . . .

. . . . $f(v,u)$ . . . .

$$f(u,v) = f(v,u).$$

$u = (0, u, 0)$ $v = (v, 0, 0)$ . ...

$$f(v,u) = (v, u\sqrt{1 - v^2/c^2}, 0),$$
$$f(u,v) = (v\sqrt{1 - u^2/c^2}, u, 0).$$

I III

G

61.3 61.2 61.1 65

$$du_x = \frac{du_x\ (1+ v u_x) \text{ Š } v\, du_x\ (u_x + v)}{(1+ v u_x)^2} = \frac{1 \text{ Š } v^2}{(1+ v u_x)^2}\, du_x$$

(65.1) $$= \frac{du_x}{{}^2(1+ v u_x)^2},$$

(65.2) $$du_y = \frac{1}{}\frac{du_y\ (1+ v u_x) \text{ Š } v\, du_x\, u_y}{(1+ v u_x)^2},$$

(65.3) $$du_z = \frac{1}{}\frac{du_z\ (1+ v u_x) \text{ Š } v\, du_x\, u_z}{(1+ v u_x)^2}.$$

$dt = \ (dt + v\, dx)$

(65.4) $$a_x = \frac{a_x}{{}^3(1+ v u_x)^3},$$

(65.5) $$a_y = \frac{a_y}{{}^2(1+ v u_x)^2} \text{ Š } \frac{v\, a_x\, u_y}{{}^2(1+ v u_x)^3},$$

(65.6) $$a_z = \frac{a_z}{{}^2(1+ v u_x)^2} \text{ Š } \frac{v\, a_x\, u_z}{{}^2(1+ v u_x)^3}.$$

(65.7) $$a = \frac{a}{{}^3(1+ v \cdot u)^3},$$

(65.8) $$a = \frac{a}{{}^2(1+ v \cdot u)^2} \text{ Š } \frac{u\ \ v \cdot a}{{}^2(1+ v \cdot u)^3}.$$

K 66

K $u = v$

I III

$$(66.1) \quad a = {}^{Š 3}(u)\, a^{RF}$$

$$(66.2) \quad a = {}^{Š 2}(u)\, a^{RF} .$$

n II H

z y x . . . . K . .. z y x 67

v K . .. . K . . . v K . .. . K . . . . K . ..

$$v = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \quad ,$$

$$v = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \quad .$$

K K

$$v = Šv \qquad \text{or} \qquad v_j = Šv_j .$$

x x 68

$$x = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z),$$

$$x = (x^1, x^2, x^3) = (x , y , z),$$

$$v := |v| = |v| \quad n := v/v = Šv /v, \quad n =: (n_1, n_2, n_3)$$

$$x_{\mathbf{I}} := x \cdot nn , \quad x := x Š x_{\mathbf{I}} ,$$

$$x_{\mathbf{I}} := x \cdot nn , \quad x := x Š x_{\mathbf{I}} .$$

n

(56.1 69

$$x = x \quad , \quad x_{\mathbf{I}} = (x_{\mathbf{I}} Š vt), \quad t = t Š |x_{\mathbf{I}}| \frac{v}{c^2} \quad ,$$

I III

$x_{\parallel}$ x

$$x = x + (- 1)x_{\parallel} - vt = x + (- 1)x \cdot n n - vt,$$

$$x_i = x_i + (- 1) \sum_{j=1}^{3} x_j n_j n_i - v_i t .$$

$$t = t - \sum_{j=1}^{3} v_j x_j .$$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\frac{v_1}{c^2} & -\frac{v_2}{c^2} & -\frac{v_3}{c^2} \\ -v_1 & 1+\frac{-1}{v^2}v_1^2 & \frac{-1}{v^2}v_1 v_2 & \frac{-1}{v^2}v_1 v_3 \\ -v_2 & \frac{-1}{v^2}v_2 v_1 & 1+\frac{-1}{v^2}v_2^2 & \frac{-1}{v^2}v_2 v_3 \\ -v_3 & \frac{-1}{v^2}v_3 v_1 & \frac{-1}{v^2}v_3 v_2 & 1+\frac{-1}{v^2}v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \frac{v_1}{c^2} & \frac{v_2}{c^2} & \frac{v_3}{c^2} \\ v_1 & 1+\frac{-1}{v^2}v_1^2 & \frac{-1}{v^2}v_1 v_2 & \frac{-1}{v^2}v_1 v_3 \\ v_2 & \frac{-1}{v^2}v_2 v_1 & 1+\frac{-1}{v^2}v_2^2 & \frac{-1}{v^2}v_2 v_3 \\ v_3 & \frac{-1}{v^2}v_3 v_1 & \frac{-1}{v^2}v_3 v_2 & 1+\frac{-1}{v^2}v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

. . $B(v)$ . . . . 4 × 4 . . .

$$B(v) = \begin{pmatrix} & \frac{v_1}{c^2} & \frac{v_2}{c^2} & \frac{v_3}{c^2} \\ v_1 & 1+\frac{-1}{v^2}v_1^2 & \frac{-1}{v^2}v_1 v_2 & \frac{-1}{v^2}v_1 v_3 \\ v_2 & \frac{-1}{v^2}v_2 v_1 & 1+\frac{-1}{v^2}v_2^2 & \frac{-1}{v^2}v_2 v_3 \\ v_3 & \frac{-1}{v^2}v_3 v_1 & \frac{-1}{v^2}v_3 v_2 & 1+\frac{-1}{v^2}v_3^2 \end{pmatrix}$$