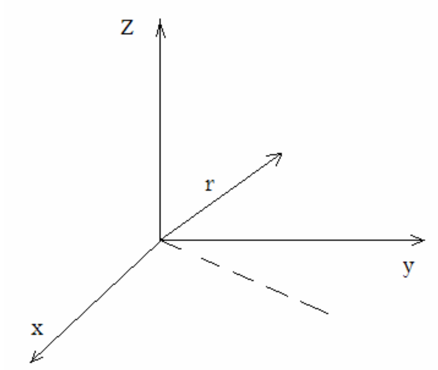
کاربرد بُردارها در نجوم کروی بخش1

یک دستگاه مختصات xyz با بردار های یکّه ($\hat{i},\hat{j},\hat{k}$) به مرکز زمین قرار می دهیم. طوری که بردار سرعت زاویه ای زمین به صورت : $\vec{\omega}=\omega.\hat{k}$ باشد که امگا اندازه ی سرعت زاویه ای زمین است . بردار **n** را به صورت زیر تعریف کرده و آن را جهت نقطه ای دلخواه می گیریم : $n=\dfrac{\vec{r}}{r}$

که در آن آر فلش بردار مکان و آر اندازه ی آن است . (به طور مثال آر فلش می تواند مکان ناظری روی زمین باشد.)



اگر زاویه بینتصویر بردار r بر صفحه xy با محور x را با زاویه ϕ و زاویه r با محور z را با θنمایش دهیم می توان نوشت :

$$\vec{r}=r\sin\theta.\cos\phi.i+r\sin\theta\sin\phi.j+r\cos\theta.k$$

پس :

$$n=\sin\theta.\cos\phi.i+\sin\theta\sin\phi.j+\cos\theta.k$$

حال کل جهت های این فضا را به دو مجموعه افراز می کنیم .

1- جهت های ثابت (ستاره ها)
2- جهت های غیر ثابت (مثل مکان رصد گر – ماهواره ها – خورشید و...)

برای مجموعه 1 قرار می دهیم :

$$\phi=\alpha \qquad \theta=\pi/2-\delta$$

یعنی همان بعد و میل .

برای مکان رصد گر قرار می دهیم :

$$\theta=\pi/2-\phi \quad \text{و} \quad \phi=\lambda$$

یعنی همان طول و عرض جغرافیایی.

مثال الف) فاصله زمانی بین طلوع و غروب ستاره ای به مختصات دلتا و آلفا را در شهری به مختصات فی و لاندا به دست آورید .

حل : اگر جهت شهر را با n1 نشان دهیم :

$$n1=\cos\phi.\cos(\omega t+\alpha)i+\cos\phi.\sin(\omega t+\alpha)j+\sin\phi.k$$

در رابطه ی بالا زمان صفر هنگامی است که ستاره در حال عبور است (چرا!!)

جهت ستاره را هم n2 می گیریم .

$$n2=\cos\delta.\cos\alpha.i+\cos\delta.\sin\alpha.j+\sin\delta.k$$

به وضوح مشخص است که صفحه ی افق صفحه ای به موازات صفحه ای عمود بر n1 است . و چون ستاره دور است زمانی طلوع یا غروب اتفاق می افتد که n1 بر n2 عمود شود یعنی : n2.n1=0 .

هدف محاسبه ی t است .

$$n2.n1 = 0 \Rightarrow \cos\phi.\cos(\omega t + \alpha).\cos\delta.\cos\alpha + \cos\phi.\sin(\omega t + \alpha).\cos\delta.\sin\alpha + \sin\delta.\sin\phi$$

پس از ساده کردن و بسط کسینوس امگا تی و سینوس امگا تی :

$$\cos\phi.\cos\omega t.\cos\delta + \sin\delta.\sin\phi = 0$$

بنابراین زمان بین طلوع و غروب از رابطه ی فوق به صورت زیر در می آید :

$$T = 2Arc\cos(-\tan\phi.\tan\delta)$$

در نگاه اوّل شاید به نظر آید نوشتن یک مثلث کروی کار را براحتی تمام می کرد . درست است . در بسیاری از مسائل استفاده از مثلثات کروی راه آسان تری است ولی در دسته ای دیگر از مسائل که حرکات مختلف در سیستم مورد بررسی اتفاق می افتد بردار ها به مراتب کار را آسان تر می کنند .

مثال ب) ماهواره ای در مداری دایره ای به شعاع R در مداری که با صفحه ی استوای زمینی زاویه تتا می سازد با سرعت زاویه ای Ω می گردد . سرعت زاویه ای زمین را امگا ی کوچک بگیرید .(هم جهت با امگای بزرگ). ناظری در عرض جغرافیایی فی در زمان t0 گذر ماهواره را مشاهده میکند . اگر ماهواره را منبع نور فرض کنیم چه مدت طول می کشد تا غروب کند . (شعاع زمین را r بگیرید) – مبدا زمان را هنگامی بگیرید که ماهواره در یکی از گره های مداری خودش است .

فرق این مسئله با قبلی در دو چیز است : 1)متحرک بودن ماهواره نسبت به دستگاه xyz 2)دور نبودن ماهواره نسبت به شعاع زمین

محور x را بر گره های مدار ماهواره فیت می کنیم. بردار یکه عمود بر مدار را که با m نشان می دهیم در این حالت :

$$\hat{m} = \sin\theta.j + \cos\theta.k$$

بردار مکان ماهواره را با T نشان می دهیم با توجه به دایره ای بودن مدار می توان نوشت :

$$T.m = 0$$

$$\frac{T.i}{|T|} = \cos\Omega t$$

اگر T را بنویسیم : $T = T_x i + T_y j + T_z k$ آن گاه از دو معادله بالا می توانیم موءلفات T را حساب کنیم .

$$T_z\cos\theta + T_y\sin\theta = 0$$

$$|T| = R$$

$$\frac{T_x}{R} = \cos\Omega t$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$T = R(\cos\Omega t.i + \cos\theta.\sin\Omega tj - \sin\theta.\sin\Omega tk)$$

بردار مکان ناظر را هم با u نمایش می دهیم(می خواهیم آن را پیدا کنیم) در لحظه ی t0 :

$$\frac{T_x i + T_y j}{|T_x i + T_y j|} = \frac{u_x i + u_y j}{|u_x i + u_y j|}$$

(چرا؟!!) بنابراین : $$\frac{\cos\Omega t0.i + \cos\theta.\sin\Omega t0.j}{\sqrt{\cos^2\Omega t0 + \cos^2\theta.\sin^2\Omega t0}} = \frac{u_x i + u_y j}{r\cos\phi}$$

$$u(t0) = \frac{r\cos\phi.\cos\Omega t0}{\sqrt{\cos^2\Omega t0 + \cos^2\theta.\sin^2\Omega t0}}.i + \frac{r\cos\phi.\cos\theta.\sin\Omega t0}{\sqrt{\cos^2\Omega t0 + \cos^2\theta.\sin^2\Omega t0}}.j$$

حال حالت کلی u را در لحظه ی t می نویسیم :

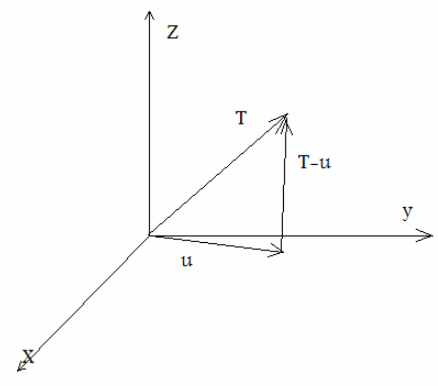
$$u(t) = r(\cos\phi.\cos\alpha.i + \cos\phi.\sin\alpha.j + \sin\phi.k)$$

که آلفا زاویه تصویر u در صفحه ی xy با محور x است طوری که $\alpha=\omega(t-t_1)$ که می خواهیم t1 را پیدا کنیم . با مساوی قرار دادن u(t0) با رابطه ی اخیر در t=t0 می توان نوشت :

$$\alpha=Arc\cos\left[\frac{\cos\Omega t0}{\sqrt{\cos^2\Omega t0+\cos^2\theta.\sin^2\Omega t0}}\right]\Rightarrow t1=t0-\frac{1}{\omega}\left[Arc\cos\left[\frac{\cos\Omega t0}{\sqrt{\cos^2\Omega t0+\cos^2\theta.\sin^2\Omega t0}}\right]\right]$$

از این جا به بعد برای سادگی t1 را جایگذاری نمی کنیم .

$$u(t)=r(\cos\phi.\cos\omega(t-t1).i+\cos\phi.\sin\omega(t-t1).j+\sin\phi.k)$$



بردار ماهواره به مبدا ناظر بردار T-u است . و ماهواره هنگامی غروب می کند که T-u بر u عمود شود یعنی :

$$(T-u).u=0\Rightarrow T.u-u^2=0$$

$$T=R(\cos\Omega t.i+\cos\theta.\sin\Omega tj-\sin\theta.\sin\Omega tk)$$

$$u(t)=r(\cos\phi.\cos\omega(t-t1).i+\cos\phi.\sin\omega(t-t1).j+\sin\phi.k)$$

$$\left[\cos\phi.\cos\Omega t.\cos\omega(t-t1)+\cos\phi.\sin\Omega t.\sin\omega(t-t1).\cos\theta-\sin\theta.\sin\phi.\sin\Omega t\right]=\frac{r}{R}$$

جواب معادله ی بالا t هایی را که ماهواره یا غروب می کند یا طلوع می کند به ما می دهد قاعدتاً اولبن t منهای t0 مدت زمان بین عبور تا غروب است .

تمرین :

1- هواپیمایی مقیّد است در ارتفاع ثابت پرواز کرده و جهت خود را تغییر ندهد . این هواپیما از مقصد A به مختصات (ϕ_0,λ_0) به B به مختصات (ϕ,λ_0) می رود . یک موشک هدایت شونده از نقطه ی C به مختصات $(\phi_0,\lambda_0-\Delta\lambda)$ روی سطح زمین (هنگامی که هواپیما در A است) حرکت کرده و پیوسته به سمت هواپیما می رود (در ارتفاع ثابت) .
معادلاتی بنویسید که از روی آن ها بتوان مسیر موشک $\phi(\lambda)$ را پیدا کرد . لزومی ندارد معادلات را حل کنید . (سرعت موشک را u ، سرعت هواپیما را v و شعاع زمین را r بگیرید.)
(راهنمایی : برای محاسبه ی سرعت از بردار مکان مشتق بگیرید و یک قید بنویسید . لزومی ندارد معادلات ساده ای بدست آید.)

2- سوال چهار نجوم کروی اسمارت (نشردانشگاهی)

3- یک مختصات دکارتی xyz بر خورشید فیت کنید . دو سیاره در نظر بگیرید که در مدار هایی دایره ای به شعاع a به زوایای میل مداری I و J به دور خورشید میگردند . اگر سرعت زاویه ای این دو را امگای کوچک و امگای بزرگ بگیریم . سرعت شعاعی سیاره ی دوم از دید سیاره اول را برحسب تابعی از زمان پیدا کنید . (زمان صفر را هنگامی بگیرید که دو سیاره در مقارنه اند.)

منتظر قسمت دوم این مقاله باشید !!

منابع :

1- سوالات دوره تابستانه المپیاد کشوری فیزیک – غیر مستقیم
2- نجوم کروی اسمارت – مستقیم